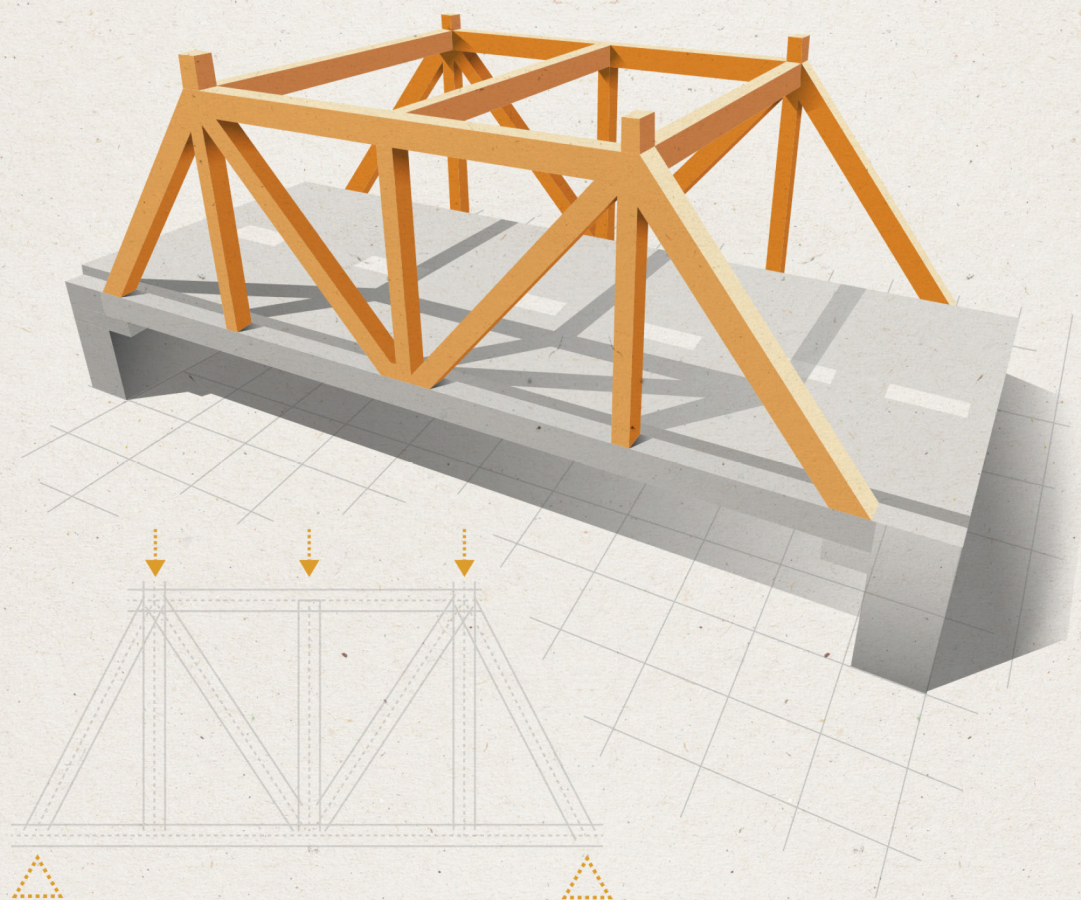


EMRAH ERDURAN

KONSTRUKSJONS- ANALYSE



FAGBOKFORLAGET

Konstruksjonsanalyse

Emrah Erduran

Konstruksjonsanalyse



FAGBOKFORLAGET

Copyright © 2026 by
Vigmostad & Bjørke AS
All Rights Reserved

ISBN: 978-82-450-6272-4
1. utgave, 1. versjon 2026

E-utgaven er basert på 1. trykte utgave, 1. opplag: ISBN: 978-82-450-5779-9

Elektronisk tilrettelegging ved forlaget.
Forsidedesign Endre Barstad

Boken er utgitt med støtte fra Kunnskapsdepartementet ved Lærebokordningen
for høyere utdanning.

Spørsmål om denne boken kan rettes til:
Fagbokforlaget
Kanalveien 51
5068 Bergen
Tlf.: 55 38 88 00
e-post: fagbokforlaget@fagbokforlaget.no
www.fagbokforlaget.no

Materialet er vernet etter åndsverkloven.
Uten uttrykkelig samtykke er eksemplarframstilling bare tillatt når det er hjemlet
i lov eller avtale med Kopinor.

Vigmostad & Bjørke AS er Miljøfyrtårn-sertifisert.



Miljøfyrtårn®

SERTIFISERT
VIRKSOMHET

til Ege og Ada

Forord

Jeg begynte å undervise i temaene som dekkes i denne boken ved Institutt for bygg- og energiteknikk ved OsloMet høsten 2018. Siden den gang har studentene stilt meg de samme to spørsmålene gang på gang:

Finnes det en lærebok vi kan bruke for å lære mer om dette stoffet?

Hvor kan vi finne flere eksempler og øvingsoppgaver?

Disse gjentatte spørsmålene sådde etter hvert et frø: ideen om å skrive boken du nå holder i hendene. Høsten 2024 startet jeg arbeidet med det første utkastet.

Gjennom hele skriveprosessen har mitt viktigste mål vært å lage en bok som svarer på studentenes behov, slik de selv har formulert dem over tid. Jeg har derfor forsøkt å presentere teorien innen konstruksjonsmekanikk på en måte som er tilgjengelig for viderekomne bachelorstudenter. Hvert kapittel er supplert med flere praktiske eksempler som viser hvordan de teoretiske begrepene anvendes i praksis.

Jeg håper at boken vil være til nytte i studiene, og at den også kan fungere som et verdifullt oppslagsverk senere i yrkeslivet.

Jeg vil rette en stor takk til alle studentene mine, som både inspirerte ideen til denne boken og tålmodig lot seg involvere i diskusjoner om hva en god lærebok i konstruksjonsanalyse bør inneholde.

En spesiell takk går til Martin Øvergård, som har gitt verdifulle innspill til det første utkastet og kontrollert alle beregningene i eksemplene.

Jeg vil også takke min redaktør, Jannicke Bærheim, for å ha tatt sjansen på en førstegangsforfatter. Jeg er takknemlig for tålmodigheten hun har vist ved å svare på mine utallige spørsmål gjennom hele prosessen.

Det var min mor som tidlig viste meg gleden ved bøker, og som indirekte er en viktig grunn til at jeg ble inspirert til å sette i gang med det krevende arbeidet det er å forfatte en. For dette, og uendelig mye annet, fortjener hun en stor takk.

Sist, men ikke minst, vil jeg takke min kone, Özgü. Uten hennes ubetingede støtte ville jeg verken blitt universitetsprofessor eller bokforfatter. Alle vanskelige valg knyttet til karriere og prioriteringer blir lettere med henne ved min side, og for det er jeg svært takknemlig.

Oslo, mars 2026

Emrah Erduran

Innhold

KAPITTEL 1

Introduksjon	13
1.1 Koordinatsystem og fortegnskonvensjon	15

KAPITTEL 2

Rotasjonsforskyvningsmetoden	19
2.1 Nøkkelpbegreper	21
2.1.1 Knutepunkter	21
2.1.2 Frihetsgrader	22
2.2 Rotasjonsforskyvningsmetoden	23
2.2.1 Innspenningsmomenter	24
2.3 Modifisert rotasjonsforskyvningsligninger	38
2.4 Rammeanalyse ved bruk av rotasjonsforskyvningsmetoden	46
2.4.1 Uforskyvelige rammekonstruksjoner	46
2.4.2 Forskyvelige rammekonstruksjoner	53
2.5 Oppgaver	66

KAPITTEL 3

Stivhetsmetode – en introduksjon	73
3.1 Stivhetsmatrise	74
3.1.1 Konstruksjonens stivhetsmatrise	77
3.2 Konstruksjonsanalyse ved stivhetsmetoden	81
3.3 Praktiske eksempler	87
3.4 Oppgaver	95

KAPITTEL 4

Fagverksanalyse ved bruk av stivhetsmetoden	99
4.1 Stivhetsmatrise for stavelementer	100
4.2 Lokale og globale koordinatsystemer	102
4.3 Stivhetsmatrise for stavelementer i globale koordinater	104

4.4	Orienteringsvinkel, β	108
4.4.1	Den oppdaterte oppskriften.....	112
4.5	Praktiske eksempler.....	113
4.6	Oppgaver.....	147

KAPITTEL 5

Bjelkeanalyse ved bruk av stivhetsmetoden.....		153
5.1	Elementets frihetsgrader i lokale og globale koordinater.....	154
5.2	Elementets stivhetsmatrise.....	155
5.3	Elementer og knutepunkter.....	158
5.4	Ekvivalente knutepunktslaster.....	163
5.4.1	Oppdatert oppskrift.....	167
5.5	Praktiske eksempler.....	168
5.6	Oppgaver.....	187

KAPITTEL 6

Rammeanalyse ved bruk av stivhetsmetoden.....		191
6.1	Rammeelement.....	191
6.2	Elementets stivhetsmatrise.....	193
6.3	Lokale og globale koordinater.....	196
6.4	Praktiske eksempler.....	200
6.5	Oppgaver.....	227

KAPITTEL 7

Analyse av hybridkonstruksjoner ved bruk av stivhetsmetoden.....		233
7.1	Prinsipper for lastfordeling i hybridkonstruksjoner.....	233
7.2	Praktiske eksempler.....	236
7.3	Oppgaver.....	255

Vedlegg A.....	259
----------------	-----

Vedlegg B.....	261
----------------	-----

Bildekrediteringer.....	263
-------------------------	-----

Stikkord.....	264
---------------	-----



KAPITTEL 1

Introduksjon

Hovedmålet for en byggingeniør er å prosjektere konstruksjoner som trygt tåler de belastningene de blir utsatt for. Alle konstruksjoner gjør dette ved å føre lastene ned til bakken gjennom fundamentet. I mer komplekse konstruksjoner, som fleretasjes bygninger eller broer, oppstår lastene ofte langt unna fundamentet, noe som gjør lastoverføringen sammensatt.

Tenk deg at du står på en høyde og ser utover en samling bygninger etter et kraftig snøfall. Snø kan virke lett når den faller, men et tykt lag på et tak kan veie flere tonn. Alle disse bygningene må føre vekten av snøen trygt ned til grunnen, men veien er lang og full av hindringer, som åpne rom og vinduer, noe som gjør denne oppgaven krevende. Byggingeniørene har løst dette ved at den tunge lasten fordeles gjennom ulike konstruksjonselementer som bjelker, søyler og vegger.

Når lastene beveger seg gjennom konstruksjonen, oppstår det indre krefter i elementene, som bøyemomenter, skjærkrefter og aksialkrefter. Å bestemme disse kreftene er avgjørende for ingeniøren. Når vi kjenner de indre kreftene i et konstruksjonselement, enten det er en bjelke, søyle eller fagverk, kan vi velge riktig materiale og dimensjon for å sikre at elementet tåler belastningen det utsettes for.

Fagområdet som tar for seg hvordan lastene fordeles i en konstruksjon, og hvordan de fører til indre krefter i elementene, kalles *konstruksjonsanalyse*.

Hvor krevende konstruksjonsanalyse er, avhenger av konstruksjonens kompleksitet. For statisk bestemte konstruksjoner, som en fritt opplagt bjelke eller et enkelt fagverk, kan støttereaksjoner og snittkrefter beregnes relativt enkelt ved hjelp av likevektsligninger. I slike tilfeller er antall ukjente krefter likt antall tilgjengelige likevektsligninger. I en statisk ubestemt konstruksjon er det derimot flere ukjente enn det likevektsligningene alene kan løse. For slike konstruksjoner må vi derfor også ta hensyn til deformasjoner, materialegenskaper og sammenhengen mellom last og forskyvning for å finne kreftene.

De aller fleste moderne konstruksjoner er statisk ubestemte. Derfor er det viktig at du som ingeniør behersker de grunnleggende prinsippene for konstruksjonsanalyse. Målet med denne boka er å gi deg nettopp denne forståelsen gjennom forklaringer, eksempler og oppgaver på ulike typer konstruksjoner.

Boka er først og fremst skrevet for studenter på videregående bachelornivå i bygg- og konstruksjonsteknikk. Den er ment som et bindeledd mellom grunnleggende mekanikkfag og mer avanserte analyser i praksis. Selv om hovedmålgruppen er studenter, håper vi også at boka kan fungere som et nyttig oppslagsverk for masterstudenter og praktiserende ingeniører som ønsker å friske opp sentrale begreper eller gå dypere inn i analysemetodene.

For å få best mulig utbytte av boka bør du ha kjennskap til mekanikk, fasthetslære og grunnleggende lineær algebra, særlig matriseoperasjoner. Du bør også være fortrolig med frilegemediagrammer, snittkraftdiagrammer og likevektsligninger. Selv om noe forkunnskap er nødvendig, har vi lagt vekt på å presentere stoffet på en tydelig og pedagogisk måte, med eksempler og forklaringer som gjør det mulig å bruke boka til selvstudium og repetisjon.

Det finnes to hovedmetoder for å analysere statisk ubestemte konstruksjoner: kraftmetoden og forskyvningsmetoden. Denne boka fokuserer utelukkende på forskyvningsmetoden, fordi kraftmetoden er vanskelig å automatisere og lite egnet for komplekse konstruksjoner.

Vi bruker bevisst enkle konstruksjoner i eksemplene for å holde regnearbeidet håndterbart. I praksis utføres nesten all konstruksjonsanalyse ved hjelp av programvare. Det er lite sannsynlig at du som ingeniør i arbeid kommer til å gjøre manuelle analyser. Likevel er det viktig å forstå metodene boka presenterer. All moderne analyseprogramvare bygger nemlig på disse prinsippene.

Når datamaskinen analyserer en konstruksjon med mange titalls eller hundrevis av elementer, følger den nøyaktig de samme stegene som du lærer her. Forskjellen er bare skalaen.

For å kunne tolke og vurdere resultatene fra slike analyser må du derfor ha innsikt i grunnmetodene, og det er nettopp det du vil oppnå ved å jobbe med denne boka.

Boka er lagt opp som en eksempeldrevet lærebok. Hvert kapittel inneholder flere eksempler med løsninger og oppgaver til slutt. Vi oppfordrer deg til å løse oppgavene både for hånd og ved hjelp av dataprogrammer. Denne tilnærmingen gir to fordeler:

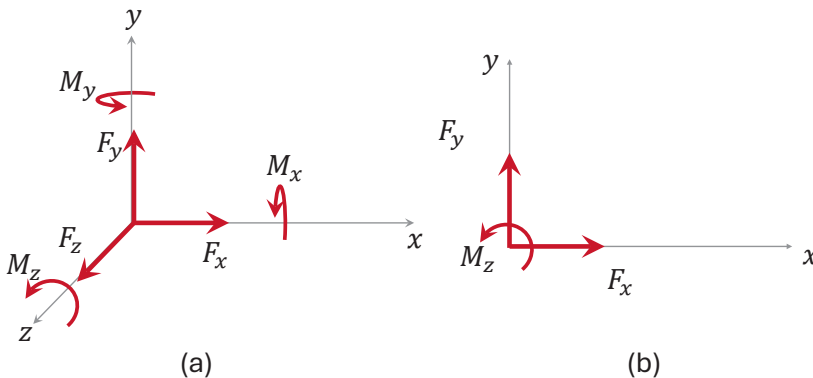
1. Du lærer å koble manuelle beregninger til digital analyse.
2. Du kan sammenligne resultatene og lære å feilsøke både egne beregninger og dataverktøyene du bruker.

Vi håper at denne boka blir et nyttig verktøy og et solid første steg i din utvikling som byggingeniør.

1.1 Koordinatsystem og fortegnskonvensjon

Det finnes ingen enighet i faglitteraturen om hvilket koordinatsystem og hvilken fortegnskonvensjon som skal brukes i konstruksjonsanalyse. Dette skaper ofte forvirring og frustrasjon både hos studenter og lærere. Ikke bare varierer konvensjonene fra bok til bok, men det er heller ikke uvanlig å finne uoverensstemmelser i én og samme bok, der én konvensjon brukes i ett kapittel og en annen i det neste.

I denne boka bruker vi et konsekvent koordinatsystem og fortegnskonvensjon gjennom alle kapitlene for å minimere forvirring. Ved valg av disse har vi sett nøye på internasjonal litteratur, ikke bare lærebøker på samme nivå, men også mer avanserte verk som mange av dere vil møte senere i studiene eller yrkeslivet. Det globale koordinatsystemet vi bruker i denne boka, er vist i figur 1.1(a), sammen med kreftene i sine positive retninger, mens figur 1.1(b) viser det samme systemet i to dimensjoner, som vil være hovedfokus her.



Figur 1.1 Koordinatsystemer og krefter i sine positive retninger i samsvar med høyrehåndregelen.

I henhold til denne konvensjonen er krefter og forskyvninger i horisontal og vertikal retning positive når de virker i de positive koordinatretningene vist i figur 1.1(a) og (b). I et 2D-plan, regnes momenter og rotasjoner som positive når de virker mot klokka. Dette er i samsvar med høyrehåndsregelen for rotasjon rundt den positive z -aksen.

Fra og med kapittel 4 vil vi også introdusere lokale koordinatsystemer for elementer som er rotert i forhold til det globale xy -systemet. Disse aksene betegnes x' , y' og z' , der x' og y' oppnås ved å rotere de globale aksene med en vinkel β . I tråd med høyrehåndsregelen vil z' -aksen være parallell med den globale z -aksen og fortsatt peke ut av planet. Dermed regnes momenter og rotasjoner rundt z' -aksen som positive når de er mot klokka.

Denne fortegnskonvensjonen skiller seg fra den som brukes i den eneste andre norske læreboka på dette området, *Matrisestatikk* av Bell. Den er imidlertid i samsvar med mye brukt internasjonal litteratur, slik som Hibbeler sin *Structural Analysis* og Ramsey og Gilbert sin *Structural Analysis*.

Videre er konvensjonen vi har valgt her, også konsistent med mer avanserte bøker, som Cook mfl. sin *Concepts and Applications of Finite Element Analysis* og Chopra sin *Dynamics of Structures*. For de av dere som går videre med disse temaene, vil dere derfor kjenne igjen konvensjonene som brukes i denne boka, spesielt når det gjelder stivhetsmatrisene for bjelke- og rammelementer.

Til slutt vil vi presisere noen punkter knyttet til notasjonen som brukes i denne boken.

Variabler som er skrevet med vanlig skrift, representerer skalarer. Variabler som er skrevet med fet skrift, representerer derimot matriser.

Av hensyn til internasjonal fagpraksis og programvaren som ingeniører bruker i reelle konstruksjonsanalyser, har vi brukt punktum som desimal-skilletegn i matriser og formler i stedet for komma. For å unngå forvirring og misforståelser er denne notasjonen brukt konsekvent for alle desimaltall gjennom hele boken.



KAPITTEL 2

Rotasjonsforskyvningsmetoden

Vi har sett at målet med en konstruksjonsanalyse er å forstå og kvantifisere hvordan ytre laster påvirker ulike konstruksjonselementer i en konstruksjon. La oss ta et enkelt eksempel for å illustrere hva det vil si.

Tenk deg at du holder en 30 cm lang linjal med et tynt tverrsnitt. Har du en linjal eller noe tilsvarende tilgjengelig, finn den gjerne frem før du leser videre.

Hold linjalen med én hånd i hver ende og bøy den svakt nok til at deformasjonen blir synlig, men ikke så mye at den tar permanent skade. Hold den der til den stabiliserer seg.

La oss se på hva vi observerer. For det første kjenner du en motstand i hendene: Linjalen reagerer på kreftene du påfører den. Disse reaksjonskreftene er like store som de påførte kreftene, men virker i motsatt retning. Dette gjør at linjalen er i likevekt.

For det andre ser du at linjalen er deformert. Deformasjonen varierer langs lengden, men de ulike punktene beveger seg ikke uavhengig av hverandre. Hvis vi forestiller oss at vi «går» langs linjalen fra den ene enden til den andre, vil vi se at deformasjonen øker mot midten og deretter avtar igjen mot null. Samtidig forblir overflaten glatt uten hakk eller brudd. Det betyr at deformasjonene er kompatible; de henger sammen på en fysisk sammenhengende måte.

Til slutt kan vi forestille oss tre nye linjaler med nøyaktig samme geometri som den du holder, men som er laget av forskjellige materialer. La oss anta at den første vi så på er av plast, mens de nye er av betong, stål og tre. Hvis vi påfører den samme lasten på alle fire linjalene, vil de deformeres på en tilsvarende måte, men i ulik grad. Betong- og stållinjalen vil trolig være hardere og deformere mindre enn plastlinjalen, mens tre kanskje er mer lik plast i stivhet.