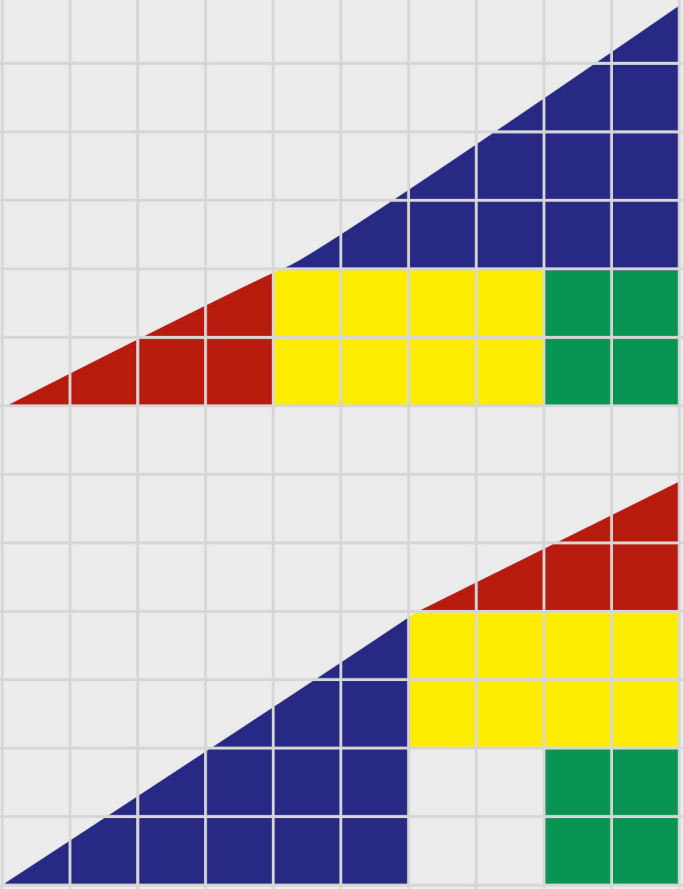
ARBEIDSBOK I MATEMATIKK FOR ØKONOMISTUDENTER

Kristina Rognlien Dahl
Robert G. Hansen



FAGBOKFORLAGET

Arbeidsbok i matematikk

for økonomistudenter

Arbeidsbok i matematikk

for økonomistudenter

Kristina Rognlien Dahl og Robert G. Hansen

FAGBOKFORLAGET

Copyright © 2025 by
Vigmostad & Bjørke AS
All Rights Reserved

ISBN: 978-82-450-5902-1
1. utgave 2025 / 1. versjon 2025

E-utgaven er basert på 1. trykte utgave, 1. opplag: ISBN: 978-82-450-5337-1

Elektronisk tilrettelegging: John Grieg, Bergen

Grafisk design og figurer: Merkur grafisk AS (Vegard Brekke)

Forsidedesign ved forlaget

Spørsmål om denne boken kan rettes til:
Fagbokforlaget
Kanalveien 51
5068 Bergen
Tlf.: 55 38 88 00
e-post: fagbokforlaget@fagbokforlaget.no
www.fagbokforlaget.no

Materialet er vernet etter åndsverkloven.
Uten uttrykkelig samtykke er eksemplarfremstilling
bare tillatt når det er hjemlet i lov eller avtale med Kopinor.

Vigmostad & Bjørke AS er Miljøfyrtårn-sertifisert.

Miljøfyrtårn®
SERTIFISERT
VIRKSOMHET

Dedikasjoner

Takk til mamma som sa at jeg måtte lese ting tre ganger til om jeg prøvde å sluntre unna. Takk til pappa som stilte opp med grublerier og cola uten sukker. Takk til Eirik for evig tro på alt, inkludert meg. Takk til farmor som faktisk var den skarpeste kniven i skuffen. Og mest av alt: Takk til Ylva og Vetle for å være lyset i livet mitt.

Kristina

«I read a book one day and my whole life was changed.»
Orhan Pamuk

Takk til mamma som lærte meg å gjøre mitt beste, til pappa som lærte meg utholdenhet, og til Rita som lærte meg om livets uransakelige underfundighet. Takk til Ba, Knut og Pål som vekket min nysgjerrighet, og som med sin raushet, godhet og medmenneskelighet har gitt meg noe å strekke meg etter.

Takk til Agnethe og Maren, for å gi livet lys, glede og håp, og for å få meg til å forstå hva som virkelig er viktig (selv om jeg er tunglært). Takk til Tale, for din tålmodige kjærlighet, herfra til månen og tebakars.

Robert

«All you need is love.»
John Lennon

Forord

Denne arbeidsboka er laget til læreboka *Innføring i matematikk for økonomistudenter*. Ved å lese læreboka og jobbe med oppgavene i arbeidsboka lærer du deg de viktigste matematiske verktøyene du trenger i et bachelorstudium i økonomisk-administrative fag. Alle oppgavene har detaljerte løsningsforslag, som du finner bakerst i boka. Oppgavene er sortert etter tema, med henvisninger til tilsvarende kapitler i læreboka.

Første del av læreboka og arbeidsboka dekker alle relevante temaer fra obligatorisk skolegang. Det er spesielt viktig å bruke tid på disse oppgavene for dem som har valgt minstekravet i matematikk på videregående skole, eller som har behov for repetisjon. Andre del av arbeidsboka tar for seg oppgaver tilhørende typiske hovedtemaer i innføringskurs i matematikk for økonomistudenter.

Jobb aktivt med oppgavene, gjerne først med hjelp av løsningsforslagene i boka. Deretter bør du gjøre de samme oppgavene på nytt, helt til du er sikker på at du kan løse dem uten å se på fasiten. Legg vekk mobilen og datamaskinen så mye som mulig. La hjernen din få tid og rom til å lage koblinger.

Matematikk handler om å forstå og utforske, om å lete seg fram til løsningen – ikke først og fremst om å pugge formler. Hvis du ikke får til en oppgave, er det ingen grunn til å fortvile: Bare prøv igjen. Det er lov å gjøre feil, og det er lov å prøve mange ganger. Det er når man gjør feil at læring skjer.

Stopp opp underveis og tenk etter hva temaet du holder på med egentlig handler om. Reflekter, drodle, filosofer og ha det litt gøy med ideene og den tankeverdenen som åpner seg.

«Genius is 1 percent inspiration and 99 percent perspiration.»

Thomas Edison

Takk

Vi vil takke Andreas Nybø i Fagbokforlaget, som har vært en entusiastisk og engasjerende redaktør for denne boka. Hans evige optimisme og mange gode ideer har vært til stor hjelp og inspirasjon under arbeidet. Vi har satt stor pris på hans aldri sviktende tro på prosjektet. Det er akkurat en slik redaktør alle forfattere ønsker seg.

En stor takk går til Vegard Brekke for ypperlig hjelp med typesetting og figurtegning, Bodil Kjenstad for pertentlig språkkorrektur og produksjonskoordinator Laura Giminska for generell stålkontroll.

Forlegger Arno Vigmostad, med alle gode medarbeidere i Fagbokforlaget, har på aller beste vis støttet prosjektet slik at denne boka ble skrevet. Med hans hjelp fikk vi utløp for mange års skrivekløe. Og kanskje kommer det en spennende fortsettelse.

Takk til gode kollegaer ved Handelshøyskolen BI for å bidra til et godt sted for matematikkundervisning og et fantastisk fint fagfellesskap.

Og ikke minst: Takk til alle studentene våre som har inspirert oss til å skrive denne boka. Vi håper den vil føles som en god hjelp.

Oslo og Iguazu Falls, april 2025

Kristina Rognlien Dahl og *Robert G. Hansen*



Å jobbe med oppgaver er hardt arbeid, men det går lettere om man samarbeider og hvis man har smågodt.

Innhold

Dedikasjoner 5

Forord 7

DEL 1
GRUNNLEGGENDE MATEMATIKK 11

KAPITTEL 1
Grunnleggende algebra: Brøk, faktorisering, potenser og røtter 13

KAPITTEL 2
Likninger, likningssystemer og ulikheter 21

KAPITTEL 3
Lineære funksjoner 27

KAPITTEL 4
Annengradsfunksjoner 35

KAPITTEL 5
Rasjonale funksjoner, polynomdivisjon og asymptoter 41

KAPITTEL 6
Repetisjonsoppgaver til del 1 45

DEL 2
MATEMATIKK FOR ØKONOMIFAG 55

KAPITTEL 7
Grunnleggende regning: Derivasjon, integrasjon, eksponensialfunksjoner og logaritmer 57

KAPITTEL 8
Funksjoner i en variabel 63

KAPITTEL 9
Renter og finansmatematikk 75

KAPITTEL 10
Funksjoner i to variable 83

KAPITTEL 11
Økonomiske anvendelser 91

KAPITTEL 12
Lineær algebra 97

DEL 3
LØSNINGER TIL DEL 1 101

LØSNINGER KAPITTEL 1
Grunnleggende algebra: Brøk, faktorisering, potenser og røtter 103

LØSNINGER KAPITTEL 2
Likninger, likningssystemer og ulikheter 121

LØSNINGER KAPITTEL 3
Lineære funksjoner 151

LØSNINGER KAPITTEL 4
Annengradsfunksjoner 173

LØSNINGER KAPITTEL 5
Rasjonale funksjoner, polynomdivisjon og asymptoter 183

LØSNINGER KAPITTEL 6
Repetisjonsoppgaver til del 1 191

DEL 4
LØSNINGER TIL DEL 2 199

LØSNINGER KAPITTEL 7
Grunnleggende regning: Derivasjon, integrasjon, eksponensialfunksjoner og logaritmer 201

LØSNINGER KAPITTEL 8
Funksjoner i en variabel 229

LØSNINGER KAPITTEL 9
Renter og finansmatematikk 259

LØSNINGER KAPITTEL 10
Funksjoner i to variable 267

LØSNINGER KAPITTEL 11
Økonomiske anvendelser 287

LØSNINGER KAPITTEL 12
Lineær algebra 301

DEL 1

Grunnleggende matematikk

KAPITTEL 1

Grunnleggende algebra: Brøk, faktorisering, potenser og røtter

Oppgaveveiledning

I dette kapitlet finner du oppgaver innen det som ofte kalles grunnleggende algebra. Dette betyr at oppgavene er knyttet til grunnleggende regneregler og metoder. Du finner oppgaver med brøk, faktorisering, potenser og røtter. Teknikkene i disse oppgavene trengs gjennom hele resten av arbeidsboka og i videre økonomistudier.

Når du jobber med oppgavene i dette kapitlet: Vær ekstra nøye med at du skjønner hva du gjør, og hvorfor du har lov til å gjøre det. Mange har en tendens til å finne på egne regler.

Teorien tilhørende disse oppgavene finner du i kapittel 2, 3, 4 og 5 i læreboka.

Oppgave 1.1 Faktoriser:

a) $2xy - xy^2$ **b)** $4x^2 - 16y^2$ **c)** $x^2 - 3x - 10$

Skriv så enkelt som mulig:

d) $\dfrac{a + a^2b}{b + ab^2}$ **e)** $\dfrac{(pq^{-2})^{-1}}{(p^{-1}q)^2}$ **f)** $\dfrac{2\sqrt{3} + 6}{\sqrt{12}}$

g) $\dfrac{2x^2 - 6x - 20}{2x - 10}$ **h)** $\dfrac{4a^2 - 4b^2}{a + b}$

Oppgave 1.2 Trekk sammen og forkort:

a) $\dfrac{x + 2y}{2} + \dfrac{y - 1}{5} - \dfrac{5x - 3}{10}$

b) $\dfrac{2x + 1}{x - 3} - \dfrac{x}{x + 3} + \dfrac{5}{x^2 - 9}$

Sett inn og regn ut:

c) $\dfrac{2x + 1}{x - 3} - \dfrac{x}{x + 3} + \dfrac{5}{x^2 - 9}$ når $x = -4$

d) $xy^2 + \dfrac{x}{y} - 4(xy)^{-2}$ når $x = -2$ og $y = -1$

Oppgave 1.3

a) Faktoriser:

i) $x^2y + xy^2$ ii) $x^2 - 4y^2$

b) Trekk sammen og skriv så enkelt som mulig:

i) $\frac{1}{2} - 3\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5}\right)$ ii) $\frac{x}{x+y} + \frac{xy}{x^2-y^2}$

c) Skriv så enkelt som mulig:

i) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ ii) $\frac{p+p^2q}{q+pq^2}$

d) Beregn verdien av uttrykket $\frac{p+p^2q}{q+pq^2}$ når $p = 2$ og $q = -1$.

Oppgave 1.4 Faktoriser:

a) $x^2y + xy$ **b)** $x^2y^2 - y^2$ **c)** $x^2 + x - 2$

Skriv så enkelt som mulig:

d) $\frac{a^2-ab}{b-a}$ **e)** $\frac{(pq)^{-2}q^3}{p(p^{-2}q)^2}$ **f)** $\frac{\sqrt{45}-2\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$

Oppgave 1.5 Trekk sammen og forkort:

a) $\frac{a}{2} - \frac{a-1}{10} + \frac{3a}{5} + \frac{18}{20}$

b) $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$

Sett inn og regn ut:

c) $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$ når $x = -2$

d) $2xy^{-1} - x^3 - xy$ når $x = -1$ og $y = 2$

Oppgave 1.6

a) Faktoriser:

i) $2x^2 + 4xy + 2y^2$ ii) $x^3y - xy^3$

b) Trekk sammen og skriv så enkelt som mulig:

i) $2 - 5\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right)$ ii) $\frac{ab}{ab+b} + \frac{b}{a+1}$

c) Beregn verdien av uttrykket $\frac{ab}{ab+b} + \frac{b}{a+1}$ når $a = -2$ og $b = 1$.

Oppgave 1.7

a) Faktoriser:

i) $3x^2 + 6xy + 3y^2$ ii) $4xy^3 - 4x^3y$

b) Trekk sammen:

i) $\dfrac{\sqrt{20} + 4\sqrt{5}}{2\sqrt{45}}$ ii) $\dfrac{p^3 + pq^2}{qp^2 + q^3}$

c) Trekk sammen og skriv så enkelt som mulig:

i) $4\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{5}\right) + 3$ ii) $\dfrac{ab}{a-3} + \dfrac{a^2b}{ab-3b}$

d) Beregn verdien av uttrykket $\dfrac{ab}{a-3} + \dfrac{a^2b}{ab-3b}$ når $a = 2$ og $b = -1$.

Oppgave 1.8

a) Faktoriser:

i) $4x^2 - 8xy + 4y^2$ ii) $5x^3y^2 - 5xy^4$

b) Skriv så enkelt som mulig:

i) $\dfrac{8\sqrt{3} - \sqrt{12}}{2\sqrt{3}}$ ii) $\dfrac{p^3q - p^2q^2}{pq - q^2}$

c) Trekk sammen og skriv så enkelt som mulig:

i) $4 + 2\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{4}\right)$ ii) $\dfrac{b}{b+4} + \dfrac{a^2b}{a^2b + 4a^2}$

d) Beregn verdien av uttrykket $\dfrac{b}{b+4} + \dfrac{a^2b}{a^2b + 4a^2}$ når $a = -3$ og $b = -2$.

Oppgave 1.9

Trekk sammen og forkort:

a) $\dfrac{1}{2}(x+1) - \dfrac{x}{4}(2x-4) + 2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$

b) $(a-b)^2 - (a+b)(a-b)$

c) $\dfrac{x+3}{x-2} + \dfrac{1}{x}$

d) $\dfrac{(2pq)^2}{2p^{-2}q^{-4}}$

e) $\dfrac{\sqrt{20} + \sqrt{45}}{\sqrt{80}}$

f) $2\dfrac{x^2}{\sqrt{x}} + 3x\sqrt{x}$

Oppgave 1.10

a) Faktoriser:

i) $-x^2 - 2xy - y^2$ ii) $8x^3y - 2xy$

b) Trekk sammen og skriv så enkelt som mulig:

i) $\dfrac{2\sqrt{5} - \sqrt{45}}{\sqrt{5}}$ ii) $\dfrac{p^2q - pq^2}{p^2 - q^2}$

c) Trekk sammen og skriv så enkelt som mulig:

i) $1 - 2\left(\dfrac{2}{7} - \dfrac{1}{2}\right)$ ii) $\dfrac{a}{b-2} + \dfrac{ab}{2a - ab}$

d) Beregn verdien av uttrykket $\dfrac{a}{b-2} + \dfrac{ab}{2a - ab}$ når $a = 2$ og $b = -1$.

Oppgave 1.11

a) Faktoriser:

i) $x^2 + 4xy + 4y^2$ ii) $xy^3 - 4xy$

b) Trekk sammen og skriv så enkelt som mulig:

i) $\dfrac{\sqrt{28} - \sqrt{7}}{\sqrt{7}}$ ii) $\dfrac{pq - pq^2}{1 - q^2}$

c) Trekk sammen og skriv så enkelt som mulig:

i) $2 + 2\left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{2}\right)$ ii) $\dfrac{a+b}{b-a} + \dfrac{ab}{a^2 - ab}$

d) Beregn verdien av uttrykket $\dfrac{a+b}{b-a} + \dfrac{ab}{a^2 - ab}$ når $a = -1$ og $b = -2$.

Oppgave 1.12

Faktoriser:

a) $2a^2 - a$ **b)** $x^3 - 9x$

c) $2x^2 + 2x - 12$ **d)** $x + 1 - \dfrac{6}{x}$

Skriv så enkelt som mulig:

e) $\dfrac{3(pq^{-3})^{-2}}{9^{-1}pq^3}$ **f)** $\dfrac{\sqrt{32} - \sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ **g)** $\dfrac{x^2 - 9y^2}{x - 3y}$

Oppgave 1.13 Trekk sammen og forkort:

a) $\dfrac{x+2}{2}+\dfrac{2x}{3}-\dfrac{x-6}{6}$ **b)** $\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{x}{x+5}-\dfrac{x^2+5}{x^2-25}$

Sett inn og regn ut:

c) $\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{x}{x+5}-\dfrac{x^2+5}{x^2-25}$ når $x=-1$

Oppgave 1.14 Trekk sammen og forkort:

a) $\dfrac{2a}{3}+\dfrac{a}{9}-\dfrac{5a}{6}+\dfrac{a}{2}$

b) $3x(x+y)-5(x-y)(x+y)+x^2$

c) $\dfrac{4(x+y)}{x^2-y^2}-\dfrac{2x+3y}{x-y}$

Sett inn og regn ut:

d) $3x(x+y)-5(x-y)(x+y)+x^2$ når $x=-3$ og $y=-1$

e) $\dfrac{p}{q}-\dfrac{2p}{2q-p}+\sqrt{p^2-q}$ når $p=2$ og $q=-5$

Oppgave 1.15 Faktoriser:

a) $-2x^2+200$ **b)** $x^2-12x+35$ **c)** $3x^2-75y^2$

Skriv så enkelt som mulig:

d) $\dfrac{a^5b^4\cdot(a^{-1}b)^{-2}}{(ab)^3}$ **e)** $\dfrac{\sqrt{12}+\sqrt{75}}{3}$ **f)** $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+2\sqrt{xy}+y}$

Oppgave 1.16 Trekk sammen: $x(x-y)+y(x-y)+2y^2$

Oppgave 1.17 Trekk sammen: $(3a-2b)^2-(2a-3b)^2$

Oppgave 1.18 Beregn verdien av uttrykket $x(x-y)+y(x-y)+2y^2$ når $x=3$ og$y=-1$.

Oppgave 1.19 Faktoriser uttrykket: $-(2x-3y)^2+(3x-2y)^2$

Oppgave 1.20 Trekk sammen: $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)$

Oppgave 1.21 Trekk sammen: $\frac{2x}{2x-2y}-\frac{xy}{x^2-y^2}-\frac{3x}{x^2+xy}$

Oppgave 1.22 Faktoriser:

a) x^2-2x **b)** n^3-n **c)** $3x^2+3x-60$

Skriv så enkelt som mulig:

d) $1+\frac{1}{x}-\frac{20}{x^2}$ **e)** $\frac{4(p^2q^3)^3}{2^2p^{-1}q^2}$ **f)** $\frac{\sqrt{45}-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

g) $\frac{2a^2-8b^2}{2a-4b}$ **h)** $\frac{a^2b^2-b^2}{b-ab}$

Oppgave 1.23 Trekk sammen og forkort:

a) $\frac{a+1}{2}-\frac{b}{5}+\frac{2b-5a}{10}$

b) $\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{x}{x-1}$

Sett inn og regn ut:

c) $\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{x}{x-1}$ når $x=2$

d) $2xy^3-\frac{x}{y}-y^2$ når $x=-2$ og $y=-1$

Oppgave 1.24 Faktoriser:

a) $xy-x^2y$ **b)** $2x^2+4xy+2y^2$ **c)** $-x^2+4x+5$

Skriv så enkelt som mulig:

d) $\frac{a^2b}{ab}$ **e)** $\frac{(p^2q^{-1})^2}{q^{-4}(pq)^3}$ **f)** $\frac{4\sqrt{27}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

g) $\frac{xy-x^2y}{1-x^2}$ **h)** $\frac{p-q}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$