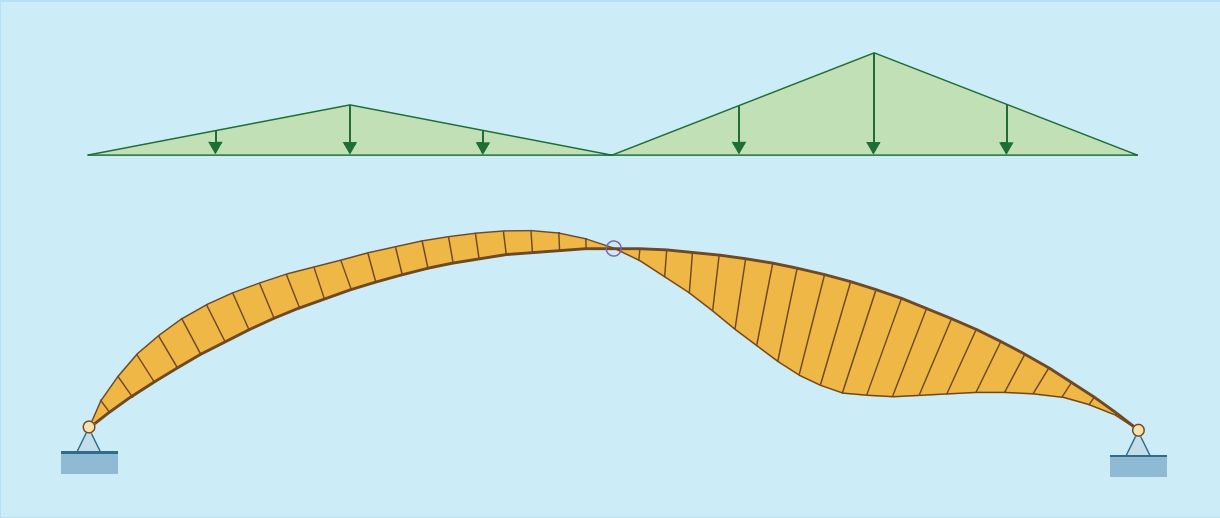
Kolbein Bell

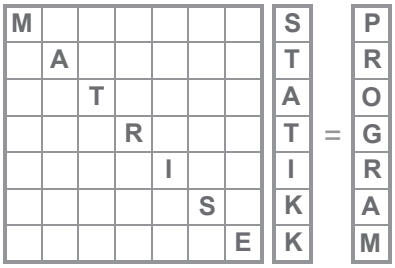
# MATRISESTATIKK

4. UTGAVE



Statiske beregninger
av fagverk, rammer og buer

FAGBOKFORLAGET


M
A
T
R
I
S
E
S T A T I K K
=
P R O G R A M

Kolbein Bell

# MATRISESTATIKK

## Statiske beregninger av fagverk, rammer og buer

4. utgave

FAGBOKFORLAGET

Copyright © 2019 by
Vigmostad & Bjørke AS
All Rights Reserved

ISBN: 978-82-450-3067-9
ISBN (trykt): 978-82-450-2406-7

1. utgave 1987
2. utgave 1994
3. utgave 2011
4. utgave 2018 / 1. opplag 2018

Tilrettelagt for e-bok: John Grieg, Bergen
Forsidedesign ved forfatteren og forlaget
Sats: Forfatteren

Spørsmål om denne boken kan rettes til:
Fagbokforlaget
Kanalveien 51
5068 Bergen
Tlf.: 55 38 88 00 Faks: 55 38 88 01
e-post: fagbokforlaget@fagbokforlaget.no
www.fagbokforlaget.no

Materialet er vernet etter åndsverkloven.
Uten uttrykkelig samtykke er eksemplarfremstilling
bare tillatt når det er hjemlet i lov eller avtale med Kopinor.

# Forord
## til første utgave

Denne boken samler mellom to permer innholdet i tre trykksaker som har vært benyttet som pensumlitteratur i emnet **Konstruksjonsmekanikk - beregningsmetoder** som undervises i 3. årskurs for studenter innen studieprogram for *Bygg- og miljøteknikk* ved NTNU.

Boken er delt i to deler hvorav den første og største delen dekker det som tradisjonelt har vært kalt *matrisestatikk* og er begrenset til lineær eller såkalt 1. ordens teori. Del II gir en innføring i ikkelineær teori med hovedvekt på såkalt 2. ordens teori og dennes anvendelse mot stabilitet og knekking. Oppgaver og eksempler, som tidligere var et eget hefte, er nå tatt med i boken og fordelt på de enkelte kapitler. I motsetning til sin forgjenger, en håndskrevet trykksak med samme tittel og av samme forfatter som her, og som ble utgitt første gang i 1987, vil nok oppgavene og eksemplene få denne boken til å fremstå som en mer tradisjonell lærebok.

Med unntak av et tiår rundt årtusenskiftet, hvor jeg undervisningsmessig var mer opptatt av trekonstruksjoner, har jeg undervist innen det tema som boken omfatter siden tidlig på 1980 tallet. For 30 år siden var IKT landskapet et annet enn i dag. Datamaskinen var den gang stort sett forbeholdt universiteter og høgskoler, forskningsinstitutter og større bedrifter. Det var et meget beskjedent utbud av programverktøy for konstruksjonsberegninger, og programmering var noe de fleste studenter ved NTH fikk (begrenset) utdanning i, og som de bedrev i forbindelse med problemløsning innen ingeniørfag. Således ble "matrisestatikk-kurset" på 1980 tallet etterfulgt av et kurs innen "programmering av konstruksjonsberegninger" - på slutten av 1980 tallet tok ca 75% av studentene som hadde tatt matrisestatikk dette programmeringskurset. I grupper utviklet studentene et rammeprogram som noen av dem benyttet i andre kurs.

Tidlig på 1990 tallet endret bildet seg. De personlige datamaskinene (PC) ble kraftigere og vesentlig billigere enn de grafiske arbeidsstasjonene, og fokus ble dreid mer mot bruken av programvaren enn utviklingen av den, også på NTH. Antallet studenter som fulgte vårt programmeringskurs sank utover 90 tallet, og like etter årtusenskiftet gikk kurset inn, og det ble mer eller mindre slutt på at "bygg-studenter" fikk undervisning i programmering. Dette har også satt sitt preg på "matrisestatikk-kurset" som har seilt under mange navn de siste 10-15 årene, fra *Matrisestatikk*, via *Konstruksjonsanalyse og Elementmetoden for rammer* til dagens navn. Innholdet har også endret seg noe ved at det programmeringsmessige er tonet sterkt ned, mens matrisestatikkens nære slektskap med *elementmetoden* er viet større oppmerksomhet. Det siste henger også sammen med en viss reduksjon og omlegging av mekanikkundervisningen som har funnet sted i løpet av de siste 10-15 årene.

Bokens innhold avspeiler disse forholdene, og for noen år siden fikk det omtalte kurset også ansvaret for å gi en introduksjon til 2. ordens teori og knekking, derfor DEL II. Mens denne delen (II) ikke gir seg ut for å være mer enn en innføring, er det i DEL I lagt vekt på å gi en rimelig grundig og fullstendig fremstilling, både for å gi brukeren av moderne rammeprogram den innsikt og bakgrunn som er nødvendig for effektiv

og sikker bruk av disse verktøyene, og samtidig gi et godt grunnlag for å kunne gi seg i kast med den litt mer matematiske *elementmetoden* som tar en videre til 2- og 3-dimensjonale problemer innen kontinuumsmekanikken.

Boken er litt spesiell i sin layout ved at det, med unntak av kapittel 1, finnes tekst bare på "høyresider", mens venstresidene er forbeholdt figurer og annen informasjon som støtter opp om teksten på motstående side. Dette fører nødvendigvis til en del blanke venstresider, og dermed sløsing av papir, men leseren kan forhåpentligvis bruke noe av denne plassen til egne notater. Løsningen, som jeg har lånt fra en dyktig kollega ved TU Delft, hvor jeg oppholdt meg i studieåret 1997-98, har den fordel at man får illustrasjonene nært opp til der de kan støtte teksten best mulig, og ofte kan man kopiere en figur slik at en slipper å bla tilbake.

I utgangspunktet forelå "manus" til de tre trykksakene som har vært utgangspunktet for boken i farger (som ble gråtoner ved trykking). For noen av figurene er fargene beholdt da de antas å gi litt ekstra informasjon, men for de aller fleste av illustrasjonene er det benyttet sjatteringer i grått - dette for at ikke prisen på boken skal bli urimelig høy.

Før jeg runder av vil jeg gjerne få takke kolleger ved Institutt for konstruksjonsteknikk, NTNU, og mange av de studentene jeg i årenes løp har "plaget" med dette stoffet, for nyttige kommentarer og påvisning av feil og/eller uklarheter. Ingen nevnt, ingen glemt. Tre navngitte personer vil jeg imidlertid gjerne få rette en spesiell takk til. Den første er min mentor, professor Ivar Holand, som dessverre gikk bort så altfor tidlig. Den andre er professor Ray W. Clough ved UC Berkeley (mannen som ga navn til elementmetoden - *Finite Element Metod, FEM*). Jeg har fortsatt notatene mine fra Cloughs kurs *CE 290C Matrix Analysis of Structures* som jeg fulgte høsten 1965, og når jeg blar i dem er det ikke vanskelig å se hvor grunntanken i boken min kommer fra. Hadde det ikke vært for disse to markante personene ville jeg neppe ha gjort de valg som førte meg inn på den veien jeg har gått, og slik sett ville da heller ikke denne boken ha sett dagens lys.

Sist, men ikke minst vil jeg takke min kone Janet for hennes store tålmodighet med mine mange avstikkere til hjemmekontoret og PC'en, ikke bare i min yrkesaktive periode, men også nå som jeg er pensjonist.

Trondheim, november 2010,
Kolbein Bell
kolbein.bell@ntnu.no

# Forord

## til ny utgave

Selv om denne utgaven er merket som ny, er det, innholdsmessig, små endringer fra forrige (første) utgave. Den største forskjellen er bruken av farger, og en vesentlig bedre utnyttelse av venstresidene – det finnes nå nesten ingen blanke venstresider. På bekostning av noen flere sider er det, for å bedre lesbarheten, benyttet litt større font i denne utgaven, og både venstre og høyre marg er rettstilt.

Boken har fått en litt mer dekkende tittel, og det er tatt med et nytt tillegg (APPENDIKS C) som viser en alternativ måte å utlede de viktigste matrisene for et rett bjelkeelement på. Tillegget med bjelkeformler (APPENDIKS D) er utvidet med en god del flere formler.

Noen mindre feil er rettet, og for enkelte problemstillinger er det forsøkt litt andre, og forhåpentligvis, bedre forklaringer. Flere av disse er inspirert av professor Kjell Magne Mathisen som skal ha takk for gode råd.

På tross av iherdig innsats er det nok fortsatt feil og uklarheter, og det er helt sikkert rom for forbedringer. Alle forslag til rettelser og/eller forbedringer mottas med takk.

Trondheim, januar 2018,
Kolbein Bell
kolbein.bell@ntnu.no

# Innhold

**Forord til første utgave** v

**Forord til ny utgave** vii

**Symboler** xv

## DEL I 1. ordens teori

**1. Innledning** **1**

1.1 Hva og hvorfor – omfang og begrensning 1

1.2 Organisering og anbefalt bruk 11

**2. Definisjoner og forutsetninger** **17**

2.1 Definisjon av problemet – forutsetninger, krav og antakelser 17

2.2 Superposisjonsprinsippet 23

2.3 Fortegnsregler og andre konvensjoner 25

2.4 Bøyning av bjelke – differensialligningen 27

2.5 Statisk bestemte, ubestemte og ustabile konstruksjoner 31

**3. Tradisjonell formulering** **49**

3.1 Innledning 49

3.2 Kraftmetoden 55

3.3 Forskyvningsmetoden 59

3.4 Kommentarer 65

**4. Grunnlaget på matriseform** **69**

4.1 Manuelle versus programstyrte beregninger 69

4.2 Modell – frihetsgrader, knutepunkter og elementer 71

4.3 Fleksibilitet og stivhet 83
4.4 Fundamentalkravene på matriseform 93
4.5 Virtuelle forskyvningers prinsipp (VFP) 105
4.6 Koordinat-transformasjoner 107
4.7 Oppsummering 111

**5. Forskyvningsmetoden 131**

5.1 Formell etablering av stivhetsrelasjonen 131
5.2 Stivhetsrelasjonen (**Kr** = **R**) ved direkte betraktning 133
5.3 Formell oppbygging av stivhetsmatrisen **K** 137
5.4 Belastning – komplementær- og partikulærløsning 139
5.5 Randbetingelser og løsning 143
5.6 Oppsummering 145

**6. Elementanalysen 161**

6.1 Innledning 161
6.2 Bøyning av bjelke – sterk og svak form 163
6.3 Bjelkeelementets stivhetsrelasjon 171
6.4 Generell prosedyre 185
6.5 Generaliserte forskyvninger 191
6.6 Naturlige koordinater 197
6.7 Transformasjoner 199
6.8 Bjelkeelement for romlig (3D) analyse 203

**7. Systemanalysen 233**

7.1 Programstyrt oppbygging av **K** og **R** 233
7.2 Randbetingelser 241
7.3 Ligningsløsning og numeriske problemer 249
7.4 Beregning av indre krefter 261

**8. Spesielle emner** **289**

8.1 Skjærdeformasjoner 289

8.2 Initialtøyninger (temperatur) 305

8.3 Eksentrisiteter og stive partier 311

8.4 Romlig bjelkeelement med vilkårlig tverrsnitt 315

8.5 Statisk kondensering – substrukturer og superelementer 317

8.6 Influenslinjer 325

**9. Modellering og kontroll** **341**

9.1 Beregningsmodell – elementinndeling 341

9.2 Takstol med skjøt i gurt 351

9.3 Buetak i fotballhall 355

9.4 Betongvegg med utsparinger 359

9.5 Bruk og kontroll 361

**DEL II 2. ordens teori**

**10. Problemet** **375**

10.1 Innledning 375

10.2 Noen enkle eksempler 379

10.3 Grunnleggende ligninger 385

**11. Analytisk løsning** **399**

11.1 Ideell, rett søyle – EULER-last 399

11.2 Kritisk spenning og slankhet 409

11.3 Stabilitetsfunksjoner 411

**12. Geometrisk stivhet – knekking** **423**

12.1 Innledning – fra sterk til svak form 423

12.2 Elementformulering 429
12.3 Systemanalysen 435
12.4 Knekking 437
12.5 Eksempler på linearisert knekkingsberegning 441

**13. Litt om knekklengder og avstivninger 467**

13.1 Knekklengder 467
13.2 Avstivninger 473

**14. Referanser 485**

**APPENDIKS**

**A Enkel matriseregning 489**

A.1 Definisjoner 489
A.2 Enkle regneregler 491
A.3 Spesielle, kvadratiske matriser 501
A.4 Oppspalting av matriser – submatriser 505
A.5 Litt om determinanter 507
A.6 Lineær avhengighet – rang 511
A.7 Lineære ligningssystemer 513
A.8 Invertering av matriser 515
A.9 Kvadratiske former og definit-het 519
A.10 Egenverdiproblemet 521

**B Løsningsmetoder for ikkelineære ligninger 523**

B.1 Innledning 523
B.2 Inkrementell metode 525
B.3 Inkrementell metode med likevektskorreksjoner 527
B.4 Iterasjonsmetoder – NEWTON-RAPHSON 527
B.5 Ikkelineære beregninger i **fap2D** 529

**C Alternativ elementanalyse** **535**

**D Bjelkeformler** **551**

**E Svarantydninger til utvalgte oppgaver** **557**

**Index** **559**

# Symboler

Nedenfor er angitt, i alfabetisk rekkefølge, de viktigste symbolene som er benyttet i boken sammen med en kort forklaring. For enkelte av symbolene er der også en side-henvisning til der symbolet er introdusert og/eller definert.

### Skalare størrelser

Disse angis med vanlige latinske eller greske bokstaver.

- $A$ - tverrsnittsareal
- $E$ - elastisitetsmodul
- $G$ - skjærmodul
- $I$ - kvadratisk arealmoment
- $L$ - (element)lengde
- $M$ - bøyemoment
- $N$ - aksialkraft (og formfunksjon)
- $P$ - last
- $R$ - kraftkomponent (knutepunktskraft på systemet)
- $S$ - kraftkomponent (knutepunktskraft på elementet)
- $V$ - skjærkraft
- $f$ - fleksibilitetskoeffisient
- $k$ - stivhetskoeffisient
- $p$ - lastintensitet (kraft/lengdeenhet)
- $q$ - generalisert forskyvning
- $r$ - forskyvningskomponent (knutepunktsforskyvning på systemet)
- $u,v,w$ - forskyvningskomponenter (i henholdsvis $x$-, $y$- og $z$-retning); $v$ angir også knutepunktsforskyvning på elementnivå
- $x,y,z$ - kartesiske koordinater, merk at ved plan (2D) analyse arbeider vi i $x$-$z$ planet
- $\alpha$ - skjærparameter (s 291)
- $\varepsilon$ - aksialtøyning (s 29)
- $\phi$ - stavaksedreining eller helning (s 28)
- $\gamma$ - skjærtøyning (s 291)
- $\delta$ - Kronecker delta (s 501)
- $\lambda$ - termisk utvidelseskoeffisient (s 307)
- $\theta$ - tverrsnittsdreining (tverrsnittsrotasjon – s 28)
- $\rho$ - krumningsradius (s 28)
- $\sigma$ - aksialspenning (s 26)

$\tau$ - skjærspenning (s 26)
$\eta$ - influenslinje (s 325)
$\xi$ - naturlig (dimensjonsløs) koordinat (s 197)

### Matriser og vektorer

Disse angis med uthevet skrift ("**fete**" typer). Et vilkårlig element i en matrise angis med samme bokstav som matrisen, men med vanlig (ikke uthevet) skrift, og med indekser som angir linje- og spaltenummer. For eksempel angir $A_{ij}$ elementet i linje $i$ og spalte $j$ i matrisen **A**.

**A** - angir sammenhengen mellom knutepunktsforskyvningene **v** og generaliserte forskyvninger **q** (s 173)
**a** - kompatibilitetsmatrise (s 103)
**B** - tøynings-forskyvnings-matrisen (s 187)
**b** - likevektsmatrise (s 101)
**C** - elastisitetsmatrisen (angir sammenhengen mellom $\boldsymbol{\sigma}$ og $\boldsymbol{\varepsilon}$, s 187)
**D** - angir en diagonalmatrise
**F** - systemets fleksibilitetsmatrise (s 85)
**f** - elementets fleksibilitetsmatrise (s 99)
**g** - likevektsmatrise (s 99)
**I** - enhetsmatrisen (s 501)
**K** - systemets stivhetsmatrise (s 89)
**k** - elementets stivhetsmatrise (s 95)
**L** - angir en nedre trekantmatrise (s 505)
**N** - formfunksjonsmatrisen (s 171)
**q** - generalisert forskyvningsvektor (s 171)
**R** - systemets lastvektor/lastmatrise (s 80)
**r** - systemets knutepunktsforskyvninger (systemets kinematiske frihetsgrader – s 80)
**S** - elementets knutepunktskrefter (s 80)
**T** - overflatekrefter eller traksjoner (s 189)
**T**, **t** - diverse transformasjonsmatriser
**U** - angir en øvre trekantmatrise (s 505)
**u** - vektor av forskyvningskomponenter (s 187)
**v** - elementets knutepunktsforskyvninger (frihetsgrader) (s 80)
**0** - nullmarisen (s 501)
$\boldsymbol{\Delta}$ - (differensial)operator-matrise (s 187)
$\boldsymbol{\varepsilon}$ - tøyningsvektor (s 185)
$\boldsymbol{\sigma}$ - spenningsvektor (s 187)

### Indekser

En superindeks på et vektor/matrisesymbol angir vanligvis elementnummer, mens en subindeks vanligvis angir knutepunktsnummer.

T som superindeks på et vektor/matrisesymbol angir alltid *transponering*.

En asterisk (*) som superindeks på et vektor/matrisesymbol angir at symbolet er knyttet til en ren deformasjonstilstand, dvs. en forskyvningstilstand som ikke inkluderer stivlegemebevegelsene.

En horisontal strek over et symbol, f.eks $\bar{\mathbf{k}}$, angir at de størrelser som symbolet representerer er referert til globale referanseakser.

En tilde (~) over et symbol angir vanligvis en *virtuell* størrelse.

0 som superindeks på et vektor/matrisesymbol, f.eks $\mathbf{S}^0$, angir "fastholdningstilstand" ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$).

# DEL I

## 1. ordens teori



Forretningsbygg (ByggMakker, Tiller); foto: K.Bell



Hallkonstruksjon (Vikingskipet, Hamar); foto: Moelven Limtre AS



Bru (Tynset); foto: K.Bell

**Figur 1.1** Eksempler på konstruksjoner vi søker løsninger for

# 1

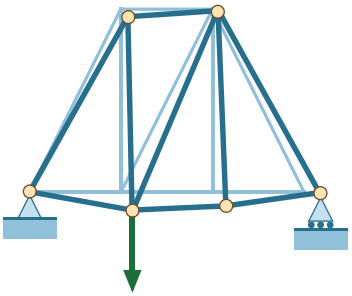
# Innledning

*Kort om hensikten med og omfanget av boken. Klargjøring av en del sentrale begreper. Krav til forkunnskaper og litt om notasjon og symbolbruk. Organisering av både stoff og layout, samt noen råd til den seriøse leser.*

## 1.1 Hva og hvorfor – omfang og begrensning

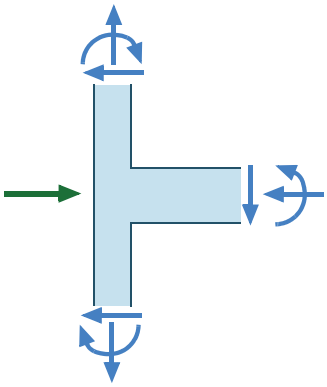
Vår problemstilling er å undersøke hvordan konstruksjoner som er bygd opp av staver og bjelker, dvs. 1-dimensjonale elementer, bærer belastningen ned/inn til oppleggene. Dette innebærer å bestemme ikke bare de indre kreftene i konstruksjonens elementer, i form av aksialkrefter ($N$), momenter ($M$) og skjærkrefter ($V$), men også deformasjonen av elementene, målt ved karakteristiske forskyvninger (inkl. rotasjoner). *Konstruksjonsanalyse* (*structural analysis*) er et annet navn som benyttes på disse oppgavene som står meget sentralt i all prosjektering av typiske bygningskonstruksjoner som f.eks. forretningsbygg, haller og broer, se figur 1.1. Når det gjelder de indre kreftene nøyer vi oss her med å bestemme snittkreftene ($N$, $M$ og $V$), dvs. resultantene av spenningene på snittflatene. Selve spenningsberegningen og kontrollen av at materialfasthetene ikke overskrides behandles i de materialspesifikke dimensjoneringsfagene.

For en spesiell, men viktig klasse av konstruksjoner, nemlig de vi betegner som *statisk bestemte*, er det å finne snittkreftene en relativt grei oppgave. Disse konstruksjonenene er slik utformet og satt sammen at vi kan bestemme både opplagerkrefter og indre krefter ved kun å benytte *likevektsbetingelsene*. Det bygges både fagverk, rammer og buer som er statisk bestemte, men de fleste bærende konstruksjoner faller utenfor denne gruppen, og det er derfor viktig å ha tilgang til mer generelle metoder. Det er gjennom årene utviklet en rekke mer eller mindre forskjellige metoder, men ved nærmere undersøkelser vil vi finne at så godt som alle er varianter av en av de to grunnleggende metodene: ***kraftmetoden*** (*force method*) og ***forskyvningsmetoden*** (*displacement method*). Begge kan formuleres med utgangspunkt i konstruksjonsmekanikkens tre **fundamentale krav** til



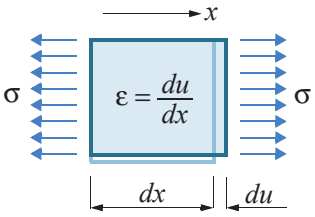
**Kinematisk Kompatibilitet**

Samsvar mellom
forskyvninger og
deformasjoner



**Statisk Likevekt**

$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_z = 0$$
$$\Sigma M = 0$$




**Materiallov**

$$\sigma = E\varepsilon$$

**Figur 1.2** Konstruksjonsmekanikkens fundamentale (KLM) krav

- ***kinematisk kompatibilitet***,
- ***statisk likevekt***,
- og tilfredsstillelse av ***materialloven(e)***, se figur 1.2.

Vi skal i et tidlig kapittel se litt nærmere på begge metodene, men vi kommer relativt fort til å parkere kraftmetoden. Grunnen til det er at den ikke egner seg for "automatiserte" (programstyrte) beregninger. Det gjør derimot forskyvningsmetoden. Vi vil vise prinsippene for "håndregning", og gjennomføre noen enkle eksempler, men vårt fokus i denne boken er *programstyrte* beregninger.

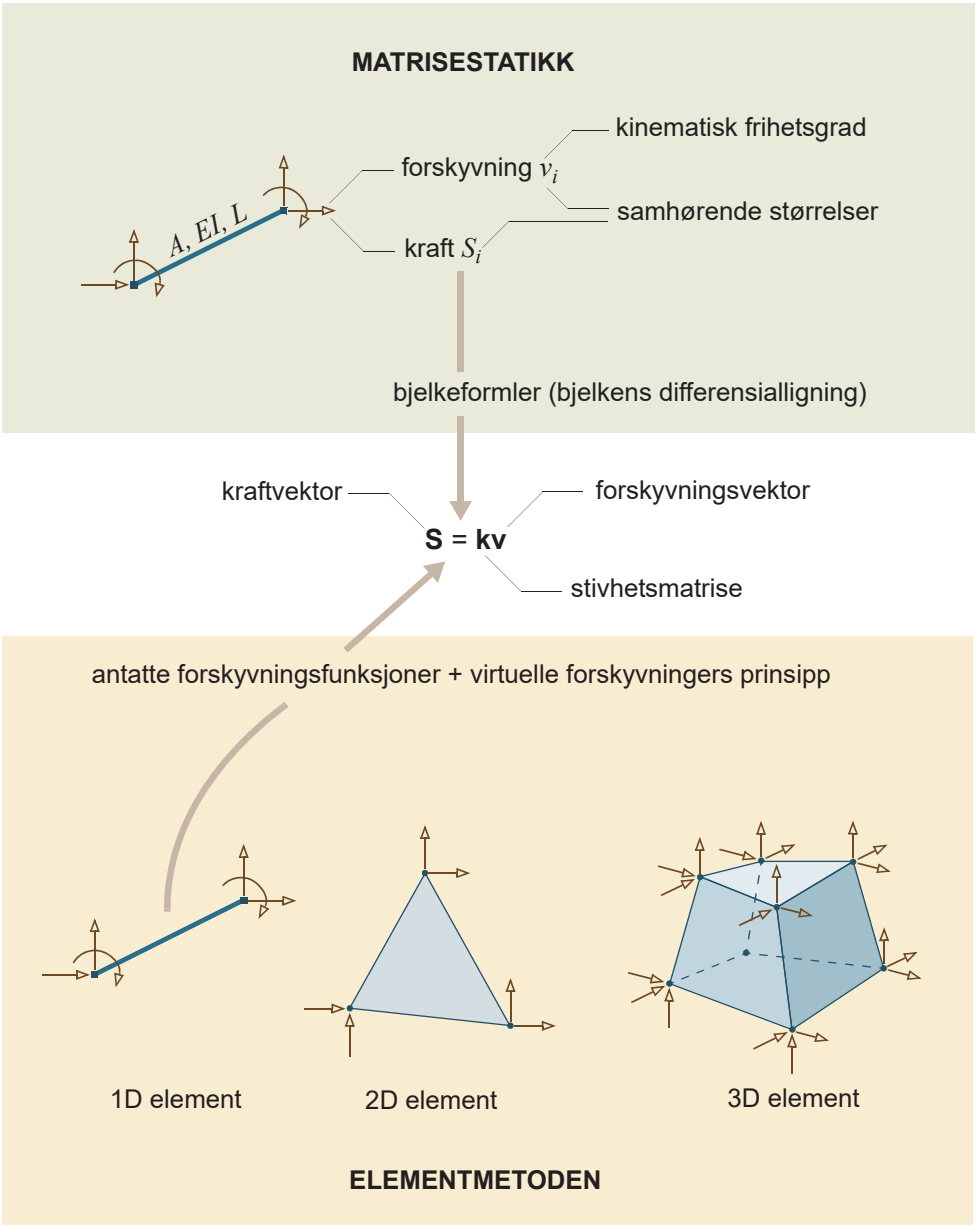
Fra en spe begynnelse sent på 1950 tallet har vi vært vitne til en nesten utrolig utvikling innen datateknikken. På utstyr som nå er så godt som allemanns eie har vi tilgang til ufattelig mye både regnekraft og lagerkapasitet, samt glimrende presentasjonsmuligheter. På dette utstyret kan det utføres tildels meget avanserte tekniske beregninger i løpet av sekunder, og resultatene kan presenteres som fargerike figurer og animasjoner. Parallelt med utviklingen av maskinvaren har det også foregått en rivende, om enn ikke like spektakulær utvikling innen programvaren, og vi har nå tilgang til programmer for de aller fleste beregningsoppgaver; noen programmer er skreddersydd for spesifikke oppgaver, som for eksempel statiske beregninger av rammer, andre er mer generelle. Det er all grunn til å tro at disse verktøyene vil bli enda bedre og mer slagkraftige, slik at det i tiden fremover vil være liten grunn til å utføre omfattende og tidkrevende beregninger "for hånd". Denne boken er derfor tuftet på følgende overbevisning:

> *Få, om noen av de ingeniører som nå er under utdanning vil noen gang komme til å utføre manuelle, statiske beregninger for annet enn ganske enkle, stort sett statisk bestemte konstruksjoner- for alle konstruksjoner av noen kompleksitet vil det bli benyttet programverktøy i en eller annen form,*

men

> *disse programmene er og blir verktøy, og forsvarlig bruk forutsetter kyndige brukere. Disse verktøyene gjør en dyktig ingeniør bedre, tildels mye bedre, mens de kan forsterke uheldige vurderinger til en middels ingeniør. I hendene på ukyndige eller lite kyndige personer kan de være direkte farlige.*

Når det er snakk om programstyrte beregninger kommer vi ikke utenom *matriseformuleringer*. Matrisene og de enkle regnereglene disse er underlagt gjør det mulig å gi beregningene en konsis og kompakt fremstilling. Det kan nok diskuteres om denne formuleringen er den mest hensiktsmessige dersom vi er henvist til å utføre de numeriske operasjonene "for hånd". For en programmerbar regnekvern som datamaskinen, er derimot matriseregningen ideell. De grunnleggende operasjonene, som addisjon og multiplikasjon, representerer en særdeles enkel *systematikk* som er lett å programmere for effektiv utførelse i en datamaskin.


MATRISESTATIKK
kinematisk frihetsgrad
forskyvning $v_i$
samhørende størrelser
kraft $S_i$
A, EI, L
bjelkeformler (bjelkens differensialligning)
kraftvektor
forskyvningsvektor
S = kv
stivhetsmatrise
antatte forskyvningsfunksjoner + virtuelle forskyvningers prinsipp
1D element
2D element
3D element
ELEMENTMETODEN

Det kan være nyttig allerede her å presisere og definere to viktige begreper innen programstyrte beregninger av bærende konstruksjoner: *matrisestatikk* (*matrix structural analysis*) og *elementmetode* (*finite element method* – **FEM**).

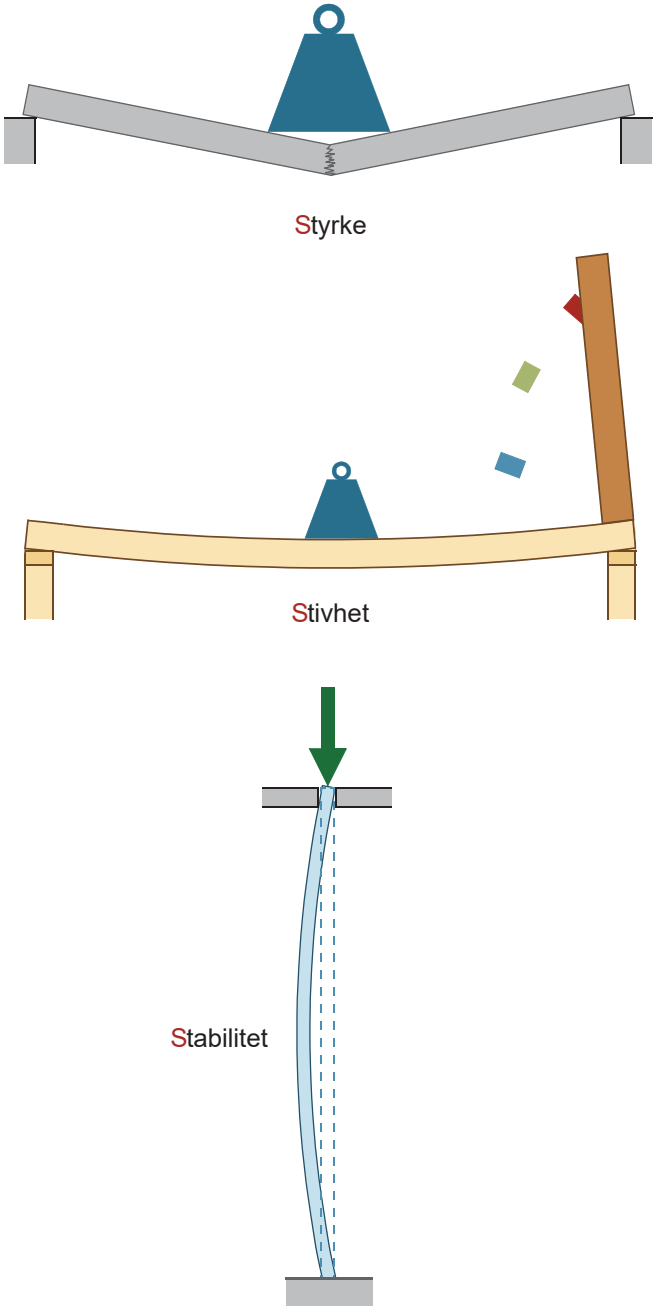
**Matrisestatikk** er betegnelsen på en kompakt og programmeringsvennlig *formulering* av de grunnleggende beregningsmetodene innen stav- og bjelkesystemer, først og fremst (og nesten bare) *forskyvningsmetoden.* Den formaliserer og generaliserer begreper som *frihetsgrad*, *knutepunkt*, *element*, *stivhet* og *fleksibilitet*. Og helt sentralt står matrisen og enkel matrisealgebra. Men matrisestatikk er en formulering, snarere enn en metode. De første matriseformuleringer finner vi på 1950 tallet, og den klassiske referansen er til ARGYRIS [1].

De viktige sammenhengene mellom krefter og forskyvninger som virker på det enkelte element kan etableres direkte fra elementær bjelketeori.

**Elementmetoden** er i dag en av de aller viktigste numeriske løsningsmetoder for en rekke problemer som matematisk lar seg beskrive av differensialligninger. Metoden, som fikk sitt navn av CLOUGH [2] i 1960, ble utviklet av ingeniører innen styrkeberegninger, som en generalisering av matrisestatikken til 2- og 3-dimensjonale elementer.
Flyindustrien ledet an, men også bygningsstatikken kom tidlig med i utviklingen. Metoden skiller seg fra matrisestatikken i det som har med selve elementene å gjøre, den såkalte *elementanalysen*; ellers er det ingen vesentlige forskjeller. Mens matrisestatikken representerer en korrekt løsning av den matematiske modellen (f.eks. EULER-BERNOULLI bjelketeori), vil en element-metode-løsning av problemer som krever 2- og/eller 3-dimensjonale elementer så godt som alltid være en *tilnærmet* løsning av det matematiske problem som den underliggende teori gir.

I boken vil vi bare omtale problemer som beskrives av 1-dimensjonale elementer, og slik sett kunne vi ha seilt under matrisestatikkens flagg. Vi kan imidlertid utlede elementrelasjonene også for 1-dimensjonale elementer etter nøyaktig de samme metoder som benyttes for 2- og 3-dimensjonale elementer. Vi vil vise begge metodene, men vi velger å fremstille elementanalysen med hovedvekten på elementmetoden. På denne måten vil vi forhåpentligvis lette overgangen til de mer omfattende, og kanskje litt vanskeligere problemer innen kontinuumsmekanikken, uten at vi dermed gjør stavstatikken særlig mer "mystisk". Og når alt kommer til alt er det mye mer som forener enn som skiller de to formuleringene.

Uansett hvilken type bærende konstruksjon det dreier seg om er vi, som ingeniører, opptatt av spesielt to forhold: konstruksjonen må ha tilfredsstillende ***styrke***, dvs. sikkerhet mot å bryte sammen, og den må ha tilfredsstillende ***stivhet***. Mens styrken først og fremst har med sikkerhet å gjøre, har stivheten mer med bruksegenskapene å gjøre. Dimensjonene




**Figur 1.3** Konstruksjonsmekanikkens tre **S**'er