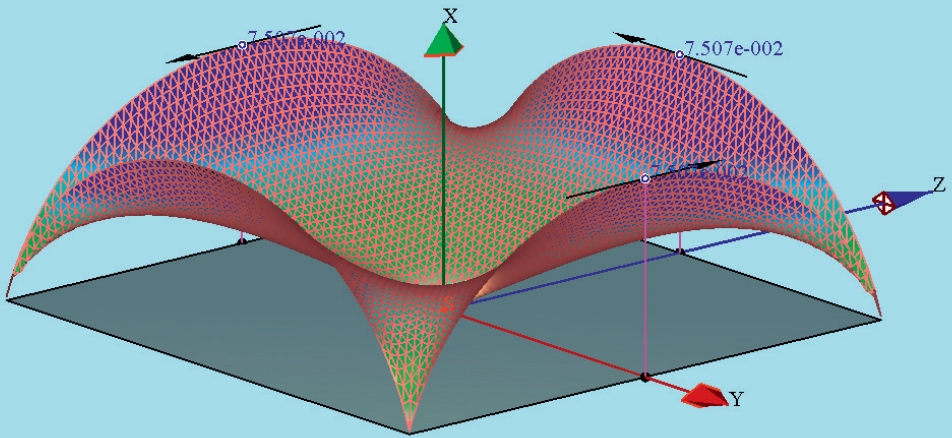


Kolbein Bell

KONSTRUKSJONS- MEKANIKK



DEL II FASTHETSLÆRE



FAGBOKFORLAGET

*Om du ikke kan utrette store ting,
utrett små ting på en storartet måte*

Fritt etter *Napoleon Hill*

KONSTRUKSJONS- MEKANIKK

Del II FASTHETSLÆRE

Kolbein Bell



FAGBOKFORLAGET

Copyright © 2019 by
Vigmostad & Bjørke AS
All Rights Reserved

1. utgave 2015 / 2. opplag 2017

ISBN: 978-82-450-3061-7
ISBN (trykt): 978-82-450-1848-6

Tilrettelagt for e-bok: John Grieg, Bergen
Sats: Forfatteren
Forsidedesign: Forfatteren/forlaget

Spørsmål om denne boken kan rettes til:
Fagbokforlaget
Kanalveien 51
5068 Bergen
Tlf.: 55 38 88 00 Faks: 55 38 88 01
e-post: fagbokforlaget@fagbokforlaget.no
www.fagbokforlaget.no

Materialet er vernet etter åndsverkloven.
Uten uttrykkelig samtykke er eksemplarframstilling
bare tillatt når det er hjemlet i lov eller avtale med Kopinor.

Forord

til foreløpig utgave

Da jeg gikk løs på oppgaven med å skrive Del I - LIKEVEKTSLÆRE, lå det i kortene at det måtte bli en Del II om FASTHETSLÆRE. Det samme som ble sagt om nødvendigheten av å skrive om likevekt kan nok i like stor grad sies om dette prosjektet. På bakgrunn av alle de bøker som finnes om temaet fasthetslære i mekanikken, tetter jeg definitivt ikke noe "faglig hull" med denne boken. Som for LIKEVEKTSLÆREN er det den pedagogiske vinkling som vil avgjøre om den har noen berettigelse. Og det er det brukerne som må avgjøre.

Med nesten 30 års fartstid innen undervisning i mekanikk og mekanikk-relaterte fag ved NTH og NTNU har jeg rimelig god bakgrunn for å mene noe om læremidler på dette området. Jeg har også undervist innen prosjektering og anvendt programmering av konstruksjonsberegninger, og jeg er opptatt av hvordan mekanikk bør undervises i lys av hva datateknikk nå tilbyr av muligheter.

Fasthetslæren, som på engelsk går under navn som *Strength of Materials* eller *Mechanics of Materials*, er ikke så veldefinert som likevektslæren. I vid forstand omfatter fasthetslæren et stort problemkompleks. Tar man for seg et knippe lærebøker på dette området vil man finne at en del tema går igjen hos alle, mens andre varierer fra bok til bok. Jeg har også med de "faste" temaene, om enn med litt varierende omfang, men for at boken ikke skulle ese ut, har jeg gjort utvalg og prioriteringer som kanskje ikke alle vil være enige i. Mine valg er helt klart påvirket av dagens mekanikkundervisning ved NTNU, men jeg håper og tror at jeg har dekket det vesentligste som et grunnleggende kurs i fasthetslære bør inneholde, pluss litt til.

FASTHETSLÆREN er dreid over samme lest som LIKEVEKTSLÆREN; det gjelder notasjon og konvensjoner samt layout og pedagogisk tankegang.

Også deler av FASTHETSLÆREN bygger på notater jeg har skrevet tidligere, mens andre deler er skrevet på blanke ark. Og jeg har fortsatt å kikke andre forfattere i kortene, spesielt med hensyn til eksempler og oppgaver. Jeg har også hatt mange interessante og nyttige diskusjoner med gode kolleger ved Institutt for konstruksjonsteknikk, NTNU, spesielt Arild H. Clausen og Arne Aalberg som begge har gitt gode innspill. En stor takk også til min kone Janet som med stor tålmodighet lar meg bruke mye tid på denne virksomheten - ja endog oppmuntret til den - hun har også rettet skrivefeil og arrestert tungroddete setninger.

Dette er en foreløpig utgave som er ferdigstilt til semesterstart. På grunn av sterkt tidspress mangler det dessverre svar på en del av oppgavene som finnes i boken.

Kolbein Bell
November 2014
kolbein.bell@ntnu.no

Forord

til første utgave

Den foreløpige utgaven av FASTHETSLÆREN forelå til semesterstart i januar 2015. Den ble til under sterkt tidspress og en kritisk gjennomgang av både meg selv og en god kollega har ført til noen rettelser (stort sett av typen trykkfeil), presiseringer og tilføyelser.

I forhold til den foreløpige utgaven er det lagt til fire nye eksempler, ett tidlig i kapittel 3, ett mot slutten av kapittel 4, ett mot slutten av kapittel 5 og ett helt i begynnelsen av kapittel 6. Disse vil forhåpentligvis forklare sider ved utledningene som ikke var tilstrekkelig vektlagt i den foreløpige utgaven. Nå finnes det også svarantydninger til alle oppgavene i boken.

Også ferdigstillingen av denne utgaven har foregått under et visst tidspress, og jeg vil rette en stor takk til min kollega Arild H. Clausen som, i en travel hverdag, har tatt seg tid til å gå gjennom hele boken. Han har ikke bare luket ut en del rene trykkfeil, men også foreslått endringer og tilføyelser. Også Arne Aalberg og Jan B. Aarseth har bidratt med nyttige synspunkter og gode forslag.

På tross av iherdig innsats finnes det nok fortsatt feil og uklarheter, og det er helt sikkert rom for forbedringer. Jeg vil sette stor pris på å bli gjort oppmerksom på alle forhold som kan gjøre boken bedre.

Kolbein Bell
Februar 2015

kolbein.bell@ntnu.no

Innhold

Forord	v og vi
Symboler og forkortelser	xv
1. INNLEDNING	1
1.1 Hva er fasthetslære?	1
1.2 Motivasjon	5
1.3 Konvensjoner - koordinater og fortegn	7
1.4 Små forskyvninger og lineær teori	11
1.5 Omfang og organisering	13
2. LIKEVEKT - KORT RESYMÉ	21
2.1 Grunnlaget	21
2.2 Fritt-legeme-diagram (FLD)	27
2.3 Likevekt og likevektsbetingelser	27
2.4 Snittkrefter	31
Sammenhengen mellom moment og skjærkraft	31
Snittkraftdiagrammer	33
3. SPENNING OG TØYNING	39
3.1 Aksialbelastet stav - HOOKEs lov	39
3.2 Spenningsanalyse av aksialbelastet stav	45
3.3 HOOKEs lov i to dimensjoner - POISSONs tall	51

3.4	Materialers mekaniske egenskaper - parametre	57
	Lineært-elastisk materiale	59
	Flyting og brudd	61
	Lineært-elastisk-idealplastisk materiale	63
	Temperaturtøyninger	63
	Grenselast og egenspenninger	65
	Krypning, relaksasjon og utmatting	69
4.	SPENNINGER I BJELKER - ENKLE TVERRSNITT	75
4.1	Begreper og forutsetninger - krumning	75
4.2	Aksialtøyning i bjelke ved ren bøyning	79
4.3	Bøyenspenninger - lineært-elastisk materiale	81
4.4	Andre arealmoment - kort repetisjon	85
4.5	Bøyning med samtidig aksialkraft	91
4.6	Bøyning om to akser	93
4.7	Skjærspenninger i bjelke med rektangulært tverrsnitt	95
4.8	Noen kommentarer til skjærspenningsformelen	109
4.9	Skjærspenninger i bjelke med sirkulært tverrsnitt	111
4.10	Skjærspenninger i I-tverrsnitt	113
	<i>Sammendrag</i>	121
5.	DEFORMASJONER I STAVER OG BJELKER	131
5.1	Innledning - motivasjon	131

5.2	Aksialdeformasjon i en rett stav	135
5.3	Bøyedeformasjoner i rette (2D) bjelker	141
5.4	Elementær (teknisk) bjelketeori	143
	Bjelkens differensialligninger	145
	Randbetingelser	147
	Løsning av differensialligningen(e)	149
	Bjelkeformler	161
	Litt mer om randbetingelser	165
5.5	Stivhetsmatrise for et plant (2D) bjelke- element	167
5.6	Skjærdeformasjoner i rette (2D) bjelker	173
	<i>Sammendrag</i>	175
6.	STATISK UBESTEMTE KONSTRUKSJONER	181
6.1	Problemstilling - et enkelt eksempel	181
6.2	Kraftmetoden og forskyvningsmetoden	183
	Kraftmetoden	185
	Forskyvningsmetoden	187
	Kommentarer	189
6.3	Kraftmetoden - generell løsningsprosedyre	191
	Statisk bestemt basissystem - SBBS	191
	Beregning av forskyvninger	193
	Problemets kinematikk	195
	Kommentarer	197
6.4	Elementærbjelke-metoden	197

6.5	Symmetri og antisymmetri	205
	<i>Sammendrag</i>	207
7.	TORSJON	211
7.1	Generelle betraktninger - definisjoner	211
7.2	ST. VENANT torsjon - sirkulære tverrsnitt	213
7.3	Vilkårlige tverrsnitt - en oversikt	225
	ST. VENANT torsjon	225
	Hvelvningstorsjon	231
	Bimoment og ST. VENANTs prinsipp	233
8.	TYNNVEGGEDE BEHOLDERE	237
8.1	Sirkulærsylindrisk beholder	237
8.2	Kuleformet beholder	239
	Kommentarer	243
9.	SPENNINGSANALYSE	247
9.1	Begreper og definisjoner	247
9.2	Plan spenningstilstand	253
	Spenningstransformasjon	255
	Hovedspenninger	257
	Maksimal skjærspenning	261
	MOHRs sirkel	263
	Absolutt maksimal skjærspenning i plan spenningstilstand	267
9.3	Spenningsanalyse på matriseform	269
	Plan spenningstilstand	269

Generell, 3D spenningstilstand	275
10. TØYNINGSANALYSE	281
10.1 Begreper og definisjoner	281
10.2 Koordinattransformasjon av små deformasjoner	285
Tøyning i 3 dimensjoner	285
Tøyning i 2 dimensjoner	287
MOHRs sirkel for tøyning i 2 dimensjoner	291
10.3 Tøyningsmåling	293
10.4 Små volum- og formendringer	297
11. MATERIALLIGNINGER	301
11.1 HOOKEs lov	301
HOOKEs lov i 3 dimensjoner	305
HOOKEs lov i 2 dimensjoner - plan spenningstilstand	307
HOOKEs lov i 2 dimensjoner - plan tøyningstilstand	309
Ortotropt elastisk materiale	313
11.2 Elastisk formendningsenergi	315
11.3 Dimensjonering av konstruksjoner	317
11.4 Flyte- og bruddkriterier	319
Maksimum skjærspenning - TRESCA-kriteriet	321
Formendningskriteriet - MISES-kriteriet	325
Normalspenningskriteriet	331
COULOMB-kriteriet	331

MOHRs bruddkriterium	331
12. SPENNINGER I VILKÅRLIGE TVERRSNITT	335
12.1 Arealsenter og arealmomenter	337
12.2 Transformasjon av andre arealmoment - hovedakser	339
12.3 Spenningsformel for vilkårlig tverrsnitt	345
12.4 Noen kommentarer til hovedakser	353
12.5 Skjærsenter	355
13. BØYESPENNINGER I KRUMME BJELKER	361
13.1 Ikkelineær spenningsfordeling	361
13.2 Radielle normalspenninger	367
14. KOMPOSITT-BJELKER	371
14.1 Generelt om kompositt-bjelker	371
14.2 Metoden med transformert tverrsnitt	379
14.3 Armert betongbjelke	381
15. KNEKNING	389
15.1 Problemet	389
15.2 EULER-søylen	391
15.3 Andre søyler	395
15.4 Slankhet og kritisk spenning	397
15.5 Knekning som spenningsproblem	399
15.6 Avstivning	399
Litteratur	403
APPENDIKS	405

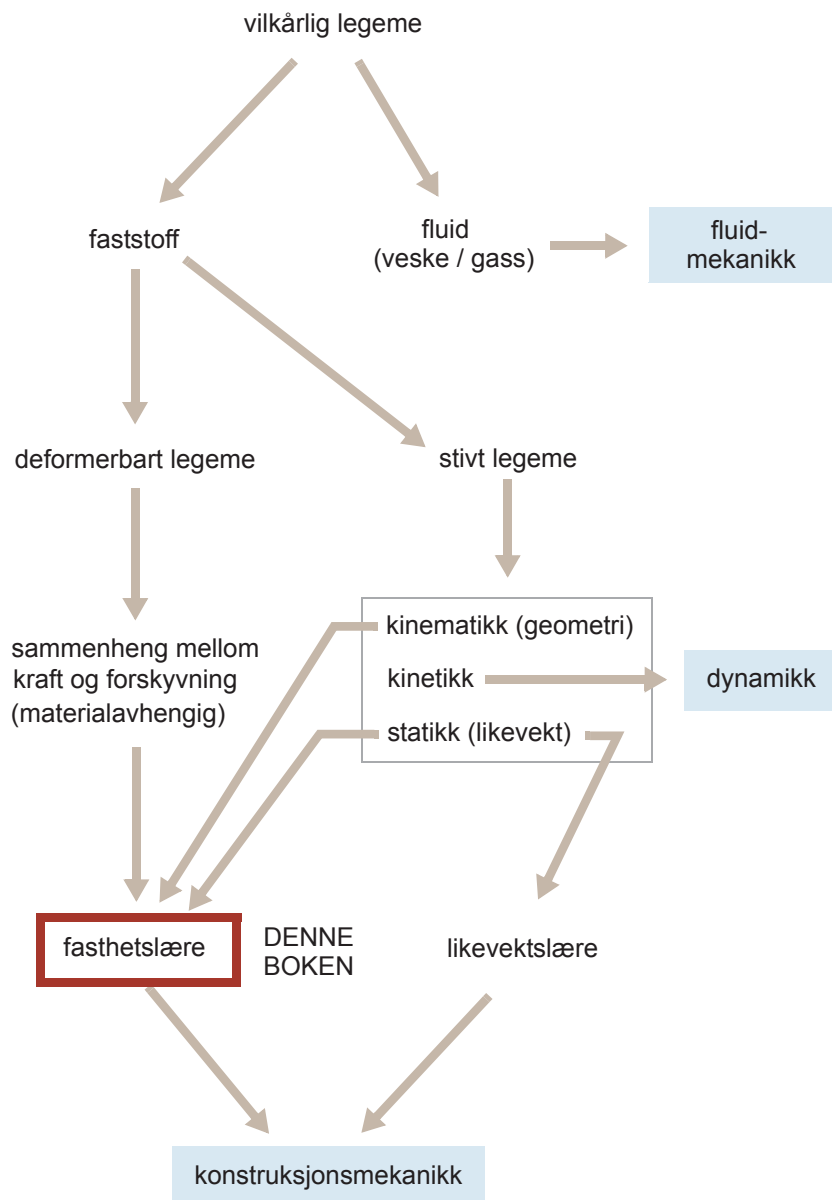
A	Materialegenskaper	407
B	Arealer og volumer	409
C	Bjelkeformler	413
	Oppgaver - Svarantydninger	419
	Indeks	425

Symboler og forkortelser

A	areal
a	momentarm, lengde
b	bredde
C	integrasjonskonstant
C	arealsenter, tyngdepunkt
$\mathbf{C}$	stivhetsmatrise (Hookes lov)
D	diameter
d	forskyvning
E	elastisitetsmodul (Youngs modul)
$\mathbf{e}$	enhetsvektor
$F, \mathbf{F}$	kraft, kraftvektor
f	fleksibilitet
G	skjærmodul
g	tyngdens akselerasjon
h	høyde
I	2. arealmoment, spenningsinvariant
J	torsjonskonstant
K	kompresjonsmodul
k	stivhet, fjærstivhet
$\mathbf{k}$	stivhetsmatrise
L	lengde
M	moment
m	masse
N	normalkraft, aksialkraft
P	ytre kraft, konsentrert last
p	lastintensitet
q	skjærstrøm
R	resultant, motstand
r	radius
S	stavkraft, arealmoment, lastvirkning
$\mathbf{S}$	kraftvektor
T	torsjonsmoment
U	formendringsenergi (tøyningsenergi)
V	skjærkraft, volum
$\mathbf{v}$	forskyvningsvektor
W	motstandsmoment, arbeid
w	nedbøyning
u, v, w	forskyvningskomponenter

x,y,z	kartesiske koordinater
α	termisk lengdeutvidelseskoeffisient, vinkel
β	vinkel
γ	skjærtøyning
δ	forskyvning
ε	normaltøyning
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tøyningsvektor, tøyningsmatrise
θ	vridningsgradient, tverrsnittsdreining, vinkel
κ	krumning, skjærfaktor
λ	Lamés konstant
ν	tverrkontraksjonstall (Poissons tall)
ρ	krumningsradius, densitet (massetetthet)
σ	normalspenning
$\boldsymbol{\sigma}$	spenningsvektor, spenningsmatrise
τ	skjærspenning
ϕ	helningsvinkel (bjelkeakse)

FLD	fritt-legeme-diagram
PMPE	prinsipp om minimum potensiell energi
SBBS	statisk bestemt basissystem
VFP	virtuelle forskyvningers prinsipp



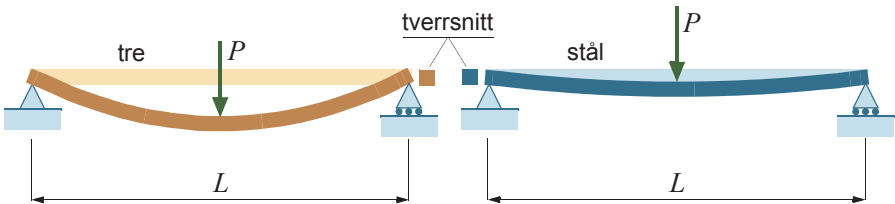
Innledning

Vi starter med å gi innhold til begrepet fasthetslære, samt å motivere for dets betydning i tilknytning til konstruksjonsteknikk. Vi repeterer noen viktige konvensjoner knyttet til koordinatsystemer og fortegnsregler som ble introdusert og benyttet i likevektslæren, og vi presiserer hva som ligger i små forskyvninger og lineær teori. Vi avslutter kapitlet med noen ord om omfang og organiseringen av stoffet.

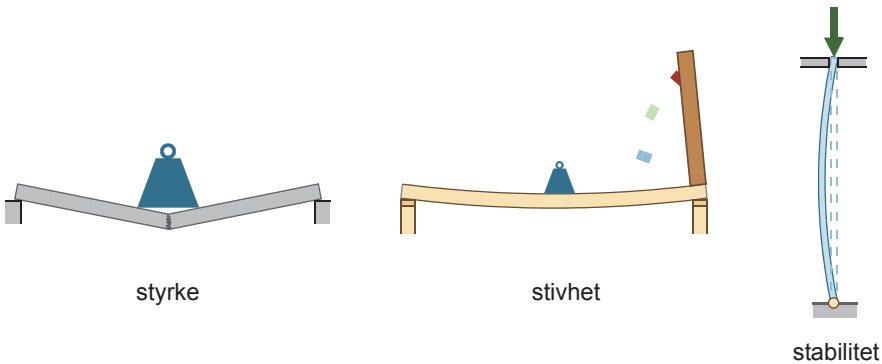
1.1 Hva er fasthetslære?

Fasthetslære er et vidt og litt diffust begrep som normalt omfatter mer enn hva som strengt tatt ligger i selve ordet. Lærebøker på engelsk som omhandler denne delen av mekanikken har enten *strength of materials* eller *mechanics of materials* i tittelen. Mens krefter (inklusive momenter) sto sentralt i likevektslæren er vi nå mer interessert i påkjenningene i selve konstruksjonsmaterialet, dvs. hvilke *spenninger* (*stresses*) og *tøyninger* (*strains*) det utsettes for. I likevektslæren bestemte vi snittkrefter på tverrsnittsflater i staver og bjelker i en viss type (statisk bestemte) konstruksjoner. Disse *indre* kreftene er resultanter av spenninger som virker på snittflatene, og bestemmelsen av disse spenningene blir et sentralt tema i fasthetslæren.

I likevektslæren arbeidet vi med *stive* legemer. Vi regnet som om våre konstruksjoner, fagverk, bjelker og rammer, *ikke* endret form selv om vi belastet dem, og at vi derfor kunne stille opp likevektsligningene for den ideelle (ubelastede) geometri. For svært mange, ja de aller fleste, praktiske konstruksjoner er feilen i de krefter vi beregner som følge av denne antakelsen liten og godt innenfor det nøyaktighetsnivå vi bør holde. Men selv om deformasjonene er små kan de allikevel være svært viktige, både med hensyn til konstruksjonens bruksegenskaper, og ikke minst i tilknytning til metoder for å kunne bestemme indre krefter og dermed spenninger i den store klassen av konstruksjoner hvor likevektsligningene alene kommer til kort, dvs. de *statisk ubestemte* konstruksjonene. Målet på deformasjon i “det små”, dvs. på mikronivå, er *tøyning*, mens det på makronivå (konstruksjonsnivå) er *forskyvninger* (inklusive



Figur 1.1 Nedbøyning av to fritt opplagte bjelker



Figur 1.2 Konstruksjonsmekanikkens tre S'er

SUPERPOSISJONSPRINSIPPET:

