Nils Kr. Rossing

Den matematiske krydderhylle

8. utgave



FAGBOKFORLAGET

Den matematiske krydderhylle

Nils Kr. Rossing

Den matematiske krydderhylle

8. utgave

FAGBOKFORLAGET

Copyright © 2019 by
Vigmostad & Bjørke AS
All Rights Reserved

6. utgave 2004
7. utgave 2007
8. utgave 2013 / 3. opplag 2018

ISBN: 978-82-450-3045-7
ISBN (trykt): 978-82-321-0363-8

Tilrettelagt for e-bok: John Grieg, Bergen
Sats: Forfatteren
Forsidedesign ved forlaget

Boken har mottatt økonomisk støtte fra Vitensenteret (Trondheim)
www.vitensenteret.com

Spørsmål om denne boken kan rettes til:
Fagbokforlaget
Kanalveien 51
5068 Bergen
Tlf.: 55 38 88 00 Faks: 55 38 88 01
e-post: fagbokforlaget@fagbokforlaget.no
www.fagbokforlaget.no

Materialet er vernet etter åndsverkloven.
Uten uttrykkelig samtykke er eksemplarfremstilling
bare tillatt når det er hjemlet i lov eller avtale med Kopinor.

"Den skjønneste ting vi kan oppleve, er det gåtefulle. Det er den dypeste følelse som står ved den sanne vitenskaps vugge. En som ikke kjenner den, og ikke kan bli forbauset, ikke føle undring, han er så godt som død. "

Albert Einstein

Forord

Boka er en samling matematiske svisker hentet fra mange fagområder og er ment å være et bidrag til kreativ formidling av matematikk i grunnskole og videregående skole. Boka er ikke ment å erstatte eksisterende læreverk, men være en kilde læreren kan øse av for å gjøre matematikkfaget mer spennende og tverrfaglig.

Boka forsøker videre å vise hvordan matematikk finnes i naturens skapelsesprosess, samt hvordan ulike former for matematikk mer eller mindre bevisst er benyttet innen kunst, kultur og håndverk. Boka ønsker å skape undring og nysgjerrighet gjennom bruk av den gode historie, lek og eksperimentering. Den peker også på en del overraskende sammenhenger som bidrar til økt tverrfaglighet.

Boka inneholder også en fyldig referanseliste, slik at det skal være mulig å fordype seg i spesielle temaer eller finne mer stoff av samme sort. Internett er også en sann ressurs innen kreativ matematikk. Under referanser finnes derfor en lang liste med nettadresser som belyser deler av stoffet.

Boka er heller ikke et pedagogisk læreverk, med prosjektoppgaver og oppgavesett. I første rekke har jeg satset på å skape kreative assosiasjoner hos læreren, som i neste omgang må ta stilling til hvordan stoffet ev. kan brukes i undervisningen. Der det er naturlig, foreslås oppgaver som ev. kan brukes i undervisningen.

Selv om de fleste oppgaver er presentert med *en* løsning, er det som oftest flere alternative løsninger til hver oppgave. For å stimulere elevenes kreativitet, er det viktig at læreren er åpen for elevenes egne løsninger, selv om disse avviker fra det som er foreslått. Det er også viktig å ikke avsløre for mye av løsningsmetoden i starten, men være lydhøre for hvilken retning elevens resonnementer tar og stimulere forskertrangen og nysgjerrigheten hos den enkelte.

Jeg tillater meg å henvise til **Christoph Kirfels** bøker *"Eksperimentering med Matematikk I og II"* fra forlaget Caspar, som har tatt for seg en rekke spennende temaer, foreslått prosjektoppgaver og gitt fyldige oppgavesett. Det viktigste med disse bøkene er at de viser at også ***matematikken kan være eksperimentell.*** Kirfel har derfor også foreslått eksperimenter innen hvert av temaene som presenteres.

Hvis denne boken kan være med på å bringe matematikken fram som et eksperimenterende "laboratorie"-fag, føler jeg at jeg har oppnådd noe av hensikten. Dette er også grunnen til at jeg har tatt med et kapittel om kreativitet.

Til sist vil jeg oppmuntre til tverrfaglig tenkning. **Bjørn Kruse** har i sin bok *Den tenkende kunstner* sagt det slik: *Spissfaglig kunnskap alene avler bare en type dumhet som, paradoksalt nok, undergraver nettopp de menneskelige kvaliteter som vi gjennom vår virksomhet som skapende, utøvende og formidlende kunstnere ønsker å underbygge: evnen til refleksjon og dyrking av ettertanken* [76].

Trondheim august 2013
n-kri-ro@online.no
Nils Kr. Rossing

Takk

Jeg ønsker i første rekke å takke Vitensenteret i Trondheim, ved daglig leder **Atle Kjærvik**, som har latt meg arbeide med denne boka som et ledd i senteret læremiddelutvikling, i tillegg til å ha finansiert utgivelsen av de fem første utgavene av boka.

Jeg vil også takke **Iacob Sømme** ved Dronning Mauds Minne, Høgskole for førskoleutdanning, som ved å utfordre Vitensenteret til å lage et halvdagsseminar om matematikk for førskolelærere var med på å initiere arbeidet med boka. Iacob har også lest manuskriptet til 1. utgaven og kommet med verdifulle kommentarer.

Videre vil jeg rette en takk til **Ingvill Merete Stedøy-Johansen** (den gang ansatt ved Program for lærerutdanning ved NTNU, i dag leder for Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen) som har lest gjennom og kommentert deler av 1. utgaven. Med sin positive holdning har hun bidratt til at denne boka er kommet ut.

Lars Lundheim (SINTEF, Tele og data) har også vært behjelpelig med å lese korrektur på manuskriptet til 1. utgave, noe som har betydd mye for å gjøre boka konsistent.

Videre vil jeg takke **Beate Reinertsen** som samvittighetsfullt har lest igjennom 1. utgave av manuskriptet på jakt etter språklige feil. Likeledes vil jeg berømme det grundige og meget samvittighetsfulle arbeidet **Inger-Marie Larsen** ved Vitensenteret har utført, ved å lese gjennom 2. utgave og kommentere og rette teksten.

Gisle Tjong (Stord) har på eget initiativ lest 4. utgave og 7. utgaven med lupe på jakt etter feil, og har dermed bidratt til at over 500 feil er rettet opp. Han har dessuten kommet med verdifulle innspill i forbindelse med brøkuttrykk knyttet til π og andre irrasjonelle tall, og kapittelet om primtall.

Sist, men ikke minst, vil jeg takke for samarbeidet med **Svein Sando,** som har vært hovedbidragsyter til kapittel 6.7, *Hvordan hoppeparadiset ble til*. Gjennom sitt grundige studium av ulike kildematerialer har han satt denne leken inn i en ny og spennende sammenheng.

Ellers har professor **Audun Holme** ved Universitetet i Bergen, kunstner **Anne Bårdsgård** og høgskolelektor **Ketil Bergesen** ved Høgskolen i Bergen kommet med nyttige innspill og korreksjoner. **Karin Kjøsnes** fra Selbu har dessuten funnet fram stoff om Lundbäck-rosa fra Selbu.

Alle figurer og bilder som brukes i denne utgaven, er gjengitt med tillatelse fra rettighetsinnehaverne når en ser bort fra portretter av kjente personer, som er hentet fra Internett. De øvrige er enten tegnet/fotografert av forfatteren, eller tegnet av **Jon Atle Dahle** ved Tapir Akademisk Forlag. **Lasse Postmyr** ved Tapir Akademisk Forlag har dessuten tålmodig svart på alle mine spørsmål, og innhentet tillatelser til bruk av en del illustrasjoner. Forlaget har dessuten for 7. utgaven leid inn **Maria Gran Hansen** som profesjonell språkvasker og korrekturleser, for nok en gang å lese gjennom manuskriptet.

Ellers er jeg takknemlig for at **Matematikksenteret** ved **Svein H. Torkildsen** valgte å foreslå at boka skulle gis til alle ungdomsskoler i landet i 2013/14, måtte den komme til nytte.

Jeg vil også takke for de mange oppmuntrende tilbakemeldinger jeg har mottatt fra lesere av boka, og håper fortsatt at den kan være en lett tilgjengelig ressursbok for realfagslærere og andre som er interessert i matematikk.

Selv om flere har lest igjennom og kommentert manuskriptet, står forfatteren ene og alene ansvarlig for de feil og mangler som fortsatt måtte være til stede i boka. Jeg vil imidlertid sette pris på kommentarer som kan forbedre en eventuell neste utgave.

Nils Kr. Rossing

Innholdsfortegnelse

1 Innledende betraktninger 11

2 Leken 17

3 Kreativitet og skaperevne 33

4 Det gylne øyeblikk 43

5 Om å skifte ståsted 47

6 Den gode historie 63

7 Undring 109

8 Matematikkens estetikk 259

9 Om å skape undersøkelseslandskaper 403

10 Matematikken i utstillingen ved et Vitensenter 437

11 Referanser 443

Vedlegg A Beregning av Mandelbrot-mengden 457

Vedlegg B Matematiske tauverksmønstre 463

Vedlegg C Koeffisientene i polynomer av ulik grad 468

Vedlegg D Pythagoreiske tripler 469

Vedlegg E Løsning på noen oppgaver 475

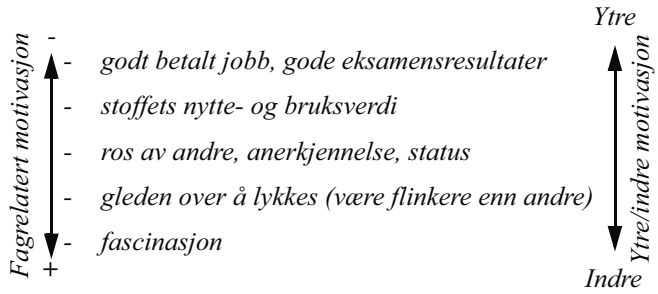
Vedlegg F Maler 479

1 Innledende betraktninger

Innledningsvis vil jeg si litt om idéen bak Vitensenteret.

Vitensenteret *skal ikke være skole*, men et ressurssenter som skaper entusiasme og *gylne knagger* til å henge kunnskapen på.

Det er flere ting som kan motivere til læring:



Fascinasjon er i større grad enn de øvrige faktorene en indre motivasjonsfaktor og viser seg ofte å være en sterkere drivkraft enn de ytre motivasjonene. Fascinasjonen er imidlertid satt sammen av en rekke elementer:

- *undring og nysgjerrighet*
- *lek og glede*
- *skjønnhetsopplevelse*
- *spenning*

Vitensenteret ønsker spesielt å spille på de *indre* motivasjonsfaktorene, samtidig som de vil vise at stoffet er matnyttig. Dette gjelder særlig for matematikk, som er tema for denne boken.

En annen viktig hensikt er å vise hvordan matematikk er et nyttig verktøy for å karakterisere og systematisere den verden vi lever i. Det er viktig for elevene å oppdage at de bruker matematikk ofte uten å tenke over det. Jeg bruker derfor eksempler fra håndverksfaget, fra lek, fra naturfag, og til og med fra livssynsfaget (KRL).

En har i stadig større grad blitt klar over at de fleste kulturer har skjulte skatter når det gjelder matematikk. Det er spesielt innen kunst- og håndverkstradisjonene vi finner en rik ornamentikk med klare matematiske trekk. Det har i de seneste årene vært en økende bevissthet om dette, og spesielt har mange afrikanske land hatt behov for å finne fram til sin egenart etter mange år under kolonivelde. I dag går denne matematikken gjerne under betegnelsen ***etnomatematikk***. Det har i denne boka dessuten vært viktig å peke på at matematikk er noe mye mer enn det en ofte forbinder med dette temaet. Her har etnomatematikken vært til stor hjelp.

Geist er et ord som mer eller mindre har gått ut av vår språkbruk. Ordet kommer fra tysk, hvor det betyr *ånd*. Vi finner det imidlertid igjen i det langt vanligere ordet *begeistring,* som vi forbinder med å være fylt av glede og entusiasme. *Entusiasme*

betyr også noe lignende, da det kommer av det greske ordet *en theos,* som betyr "*av gud"*.

Å skape *begeistring* og *entusiasme* er en av Vitensenterets viktigste oppgaver. Vår målsetting er ikke i første rekke å lære barn og voksne multiplikasjonstabellen eller Newtons 1. lov. For i denne sammenhengen er nysgjerrighet og undring ofte viktigere enn kunnskap og fakta. På denne måten kan vi spille på lag med skolen, hvor læring av faktastoff selvfølgelig *også* er viktig.

La oss derfor sette opp noen punkter som er knyttet til læringsaspektet:

- ***Leken***
  er det skapende mennesket i aksjon. Leken er fri for krav; den setter kun de grenser som skal til for å fremme kreativitet og skaperevne. Enhver erfaring er en positiv erfaring, enten et forsøk lykkes eller mislykkes. Mislykkes en, har en i det minste lært noe det er nyttig å ta med seg videre. I leken er det lov til å bruke fantasien, lov til å være litt sprø. Et viktig element i leken er det utforskende, kreative aspektet. Dette er derfor det neste punktet.

- ***Kreativitet og skaperevne***
  er egenskaper hos oss mennesker som gjør at vi kan "rydde nytt land", der få eller ingen andre har vært før oss. Kreativitet er balansegangen mellom å bygge på det andre har gjort før, og å våge å gi slipp på tradisjonen når det er nødvendig. Å gå på oppdagerferd i et uutforsket "landskap" skaper ofte gylne øyeblikk.

- ***Det gylne øyeblikk***
  er det øyeblikket da vi føler at vi har gjort den store oppdagelsen, eller skjønt en viktig sammenheng, slik Arkimedes visstnok skal ha gjort da han oppdaget loven om legemers oppdrift i vann. Han sprang ut av badekaret og ropte "Eureka", Jeg har funnet det!

- ***Skifte av ståsted***
  Gylne øyeblikk kan også være knyttet til oppdagelsen av at gammel viten kan settes inn i en ny sammenheng. Eller at vi plutselig oppdager en ny sammenheng på tvers av fag eller fagområder, fordi vi er i stand til å frigjøre oss fra vanetenking. Det kan også handle om å oppdage anvendelighet, at vi ser at et prinsipp kan brukes på en ny måte.

- ***Den gode historie***
  forteller om prosessen bak en oppdagelse. Den kan vise at det finnes levende mennesker bak de fleste oppfinnelser og nyvinninger. Historien skaper en rød tråd, og setter vitenskapelige sannheter inn i en meningsfull sammenheng.

- ***Undringen***
  er en side ved nysgjerrigheten. Det er oppstått et rusk i vår logiske verden som pirrer vår utforskertrang. Undringen er veien inn til dypere forståelse.

- ***Skjønnheten***
  kan være knyttet til at vi oppdager at det som i utgangspunktet syntes svært vanskelig, viser seg å være svært enkelt. Eller også at det enkle kan skjule en uventet

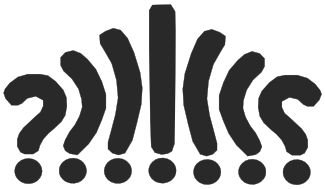
kompleksitet eller en visuell estetisk nytelse. Matematikken har i lang tid vært forbundet med det fornuftige og logiske. La oss i større grad enn tidligere også forsøke å få fram den estetiske siden ved matematikken, den siden som appellerer til våre følelser. Denne delen finner vi for eksempel skjult som en integrert del av vår kunst- og håndverkstradisjon gjennom utstrakt bruk av mønster.



La oss, før vi går videre, leke litt med symboler. Vitensenteret i Trondheim har gjennom mange år brukt spørsmålstegnet som blir til utropstegnet som kjennemerke.

Dette skal illustrere hvordan publikum kommer til utstillingen med mange spørsmål som de kan få svar på i Vitensenteret. De går da forhåpentligvis fra senteret med noen gylne øyeblikk, noen aha-opplevelser de har lyst til å fortelle til andre.

La oss endre litt på symbolet som vist i figuren til høyre.[1] Hva kan et slikt symbol bety?



Menneskets higen etter å finne svar på spørsmål er en av årsakene til vår enestående utvikling innen teknologi og vitenskap. En vel så viktig årsak er trangen til å skape *nye* problemstillinger.

For en skapende person er det essensielt å finne gode spørsmål: Dette er alltid starten på den kreative prosessen. Det lages en problemstilling. I denne sammenhengen er det ofte leken og den frie assosiasjonen som ligger til grunn for de gode spørsmålene.

Ofte kan det være nyttig å snu totalt rundt på en problemstilling, skifte ståsted for å se klarere, eller for å få en videre innfallsvinkel til en problemstilling. Det speilvendte spørsmålstegnet lengst til høyre i figuren over, kan symbolisere denne kreative spørsmålsstillingen.

En av Vitensenterets målsettinger er derfor å oppmuntre mennesker til å stille gode spørsmål. For at dette skal være mulig, må vi ikke ta fra dem undringen eller leken, som nettopp er grunnlaget for de gode "annerledesspørsmålene*"*.

To typer modeller

La oss for en kort stund anta at modellene i utstillingen kan deles inn i to kategorier.

1. *"Slik er det!"*-modeller
2. *"Hva om...?"*-modeller

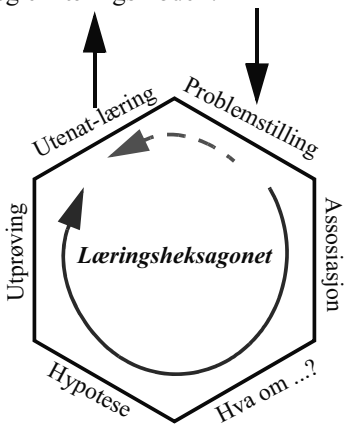
Legg merke til bruken av utrop- og spørsmålstegnet.

"Slik er det!"-modellene, er modeller som kun synes å formidle en egenskap, og gir lite rom for eksperimentering. Disse modellene slår ganske enkelt fast: Slik er det!

1. Etter en idé fra professor Steinar Nordal ved Institutt for bygg, anlegg og transport Geoteknikk ved NTNU

"Hva om...?-modellene, derimot, er modeller som utforsker og er eksperimenterende. Hva om vi gjør slik... eller hva om vi gjør det på den måten? Disse modellene setter fantasien i gang og skaper assosiasjoner eller nye spørsmål.

En kan ut fra dette lage seg en læringsmodell:



Læring kan skje på flere måter. Her er illustrert to ulike måter.

- *"Utenat"-læring eller faktalæring (stiplet pil på figuren)*
- *Eksperimenterende læring (heltrukket pil på figuren)*

"Utenat"-læring, eller faktalæring, er en tradisjonell måte å lære på. Her får elevene presentert en problemstilling, hvoretter de får presentert løsningen. Fordelen med denne måten er at den er rask, og en kan rekke over mye på kort tid. En kan imidlertid stille spørsmål ved om dette egentlig kan kalles læring. Hvis læring skal ha noen verdi, må den bygge på forståelse og innsikt. Dersom dette ikke er tilfelle, blir kunnskapen grunn og ofte svært kortvarig.

Eksperimenterende læring skaper problemstillinger, hvoretter elevene ved hjelp av ulike metoder oppdager lover og regler selv, og på den måten oppnåes læring. Det er også viktig å stimulere elevenes evne til å overføre lærdom fra ett felt til andre og nye områder. Denne formen for læring er krevende når det gjelder både tid og ressurser, og blir blant annet benyttet ved elevforsøk og ved gjennomføring av prosjektoppgaver.

Begge formene for læring brukes, og kan gå hånd i hånd. Ved Vitensenteret har vi imidlertid prøvd å fokusere på eksperimenterende læring.

Eksperimenterende læring hører sammen med "*Hva om...?"*-spørsmålene, som vi også vil se litt nærmere på under kapittelet om kreativitet.

Denne modellen har mange fellestrekk med det som ofte kalles *Den vitenskapelige metode (eller induktive metode),* som er en viktig del av skolens prosjektbaserte arbeid.

Læringsheksagonet

Utgangspunktet er ***problemstillingen*** som reiser spørsmålene eller behovene, og som representerer en utfordring.

Når vi har skjønt problemstillingen og klarlagt rammebetingelsene, kan vi starte ***assosiasjons-prosessen***, hvor vi genererer idéer og tanker på et fritt grunnlag, uten tanke på konsekvenser og om det er mulig eller ikke. Dette kalles ofte en idédugnad eller idé-myldring.

Dernest må de ulike forslagene tas opp til vurdering, og en må spørre ***hva om*** vi gjør slik, eller hva om vi velger den løsningen, hva fører det til? På dette stadiet faller de mest urealistiske problemløsningene bort. Deres funksjon har vært som *assosiasjons-kim*, de har fått lov til å være utgangspunkt for nye og mer realistiske idéer.

En sitter så igjen med noen løsningsforslag som synes realistiske. Det settes opp mer detaljerte ***hypoteser,*** eventuelt lages det tegninger og teorier om hva som vil skje dersom en foretar det ene eller det andre valget. Samtidig stilles det spørsmål som det må finnes svar på.

Så følger ***utprøvningsfasen,*** hvor teoriene og hypotesene skal prøves ut. Denne fasen gjennomføres ofte ved at det lages en modell eller gjennomføres et forsøk. Det er ikke alltid nødvendig å gjøre forsøkene i full skala. Ofte er det nok å gjennomføre en simulering ved hjelp av for eksempel et dataprogram.

Utprøvningen skal gi svar på spørsmålene som ble stilt under hypotesefasen, og bør også inkludere refleksjon over den prosessen og de resultatene som er oppnådd. Gjennom forsøket og svarene på spørsmålene oppstår selve ***læringen***. Slik erfaringsbasert læring huskes både fordi den bygger på en grundig forståelse av problemstillingen, og på grunn av *prosessen* som fører fram til løsningen.

Som vi ser, er dette en ganske lang og omstendelig vei, som ofte blir *for* tidkrevende å gå. Det kan imidlertid være viktig å gå denne veien noen ganger for å skape *gylne øyeblikk*, dyrke *leken,* skape den *gode historie* og se *skjønnheten* bak mange av teoriene.

Jeg vil i fortsettelsen av denne boka fortelle noen slike historier knyttet til matematikk i ganske vid forstand.

La oss derfor slippe ***leken*** fram, slik at ***kreativitet*** og ***skaperevne*** kan forløses. Dette vil uten tvil skape noen ***gylne øyeblikk*** idet vi ser i ***uventede retninger***, oppdager ***de gode historier*** og lar ***undringen*** føre oss inn til ***skjønnheten*** i matematikken.

2 Leken

Dersom vi leser matematikkens historie, vil vi oppdage at det som oftest var **leken** som motiverte matematikere til å utforske nye sider ved tall og geometrier. Bare unntaksvis var det konkrete behov innen vitenskapen som drev dem til å finne sammenhenger og til å bevise at en teori var riktig. Det er vel knapt noen vitenskap som opp gjennom tidene har vært så preget av det lekne mennesket.

Sonja Kibsgaard skriver følgende i boka *Mens leken er god* [70]: *"Lek blir etter min mening ikke noe som avtar med alder og år, men en måte å forske, arbeide og leve på som skaper engasjement, glød, motivasjon og hengivelse; en drivkraft til livet som gir fiksjonen forrang for fornuften!"* Lek er en livsstil, en holdning, snarere enn noe vi gjør en gang iblant på idrettplassen eller når vi er sammen med barna.

Dersom vi oppdager leken i det vi skal lære, vil ofte også motivasjonen for læringen øke. I dette avsnittet vil vi derfor beskrive noen få øvelser som kan brukes til å trene de enkleste regneartene. Ikke alle egner seg for barnetrinnet. Det overlates derfor til leseren å tilrettelegge øvelsene for den aktuelle aldersgruppen.

2.1 Leker med tall

2.1.1 Maren

Denne er ganske vanlig, og benyttes mye i skolen. Prøv å tenke ut andre varianter:

> *I utgangspunktet kan antallet deltagere være meget stort. Likevel fungerer leken best med 6–10 deltagere. Alle står i en ring. En deltagerne begynner leken med å si tallet 1. Neste mann i ringen sier 2, så 3 og så videre. Vedkommende som da får tallet 7 skal i stedet si Maren, før nestemann sier 8 og så videre. til 13. Den som får tallet 14, sier i stedet Maren. Det vil si at alle som får et tall som inneholder tallet 7 eller er delelig med 7, bytter ut tallet med ordet Maren.*
> *Den som glemmer seg og sier tallet i stedet for Maren, eller sier Maren på feil sted, går ut av leken. De andre fortsetter å telle. Den som står igjen til slutt, er vinner.*

Dersom dette blir vanskelig, kan en benytte andre tall for eksempel 3, 6 eller 9.

2.1.2 Tallrekken laget med 2

Dette er en lek med addisjon, multiplikasjon, subtraksjon og divisjon, hvor resultatet skal bli flest mulig av de naturlige tallene. Regnestykket som ender opp i heltallene, skal bare inneholde tallet 2 i tillegg til de fire regneartene. Her er de fem første tallene i rekken.

2 : 2 = ***1***
2 = ***2***
(2 + 2 + 2) : 2 = ***3***
2 · 2 = ***4***
(2 · 2 · 2 + 2) : 2 = ***5*** *(kan denne gjøres enklere?)*[2]

Forsøk deretter å finne de enkleste uttrykkene.

2.1.3 Når summen alltid skal bli 100

I denne tall-leken skal vi ta utgangspunkt tallrekken fra 1 og opp til 9. Ved å sette pluss (+) og minus (-) mellom tallene skal summen bli lik 100. La oss ta et eksempel:

12 + 3 – 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100

1 + 2 + 34 – 5 + 67 – 8 + 9 = 100

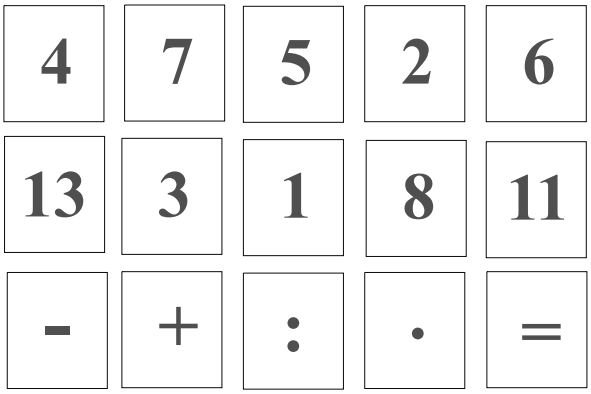
Legg merke til at tallene alltid står i riktig rekkefølge.

Det finnes mange flere alternativer. Prøv å finne noen av dem. Vi kan også snu tallrekken slik at tallene går fra 9 til 1. Eller vi kan ta i bruk de to andre regneartene, dele og gange.

2.1.4 Addisjonslek

Denne leken er ikke ferdig utviklet. Jeg vil i første omgang nøye meg med å sette opp noen rammebetingelser, for deretter å la hver enkelt undersøke og utforme detaljene for leken. Hensikten er at elevene skal få trening i å legge sammen, trekke fra, gange og dele tall.

La oss tenke oss at vi har en klasse bestående av 24 elever. Det skal lages store lapper som hver elev skal holde opp mot brystet. Disse kan være av typen vist i figuren under.



2. En enklere løsning vil være: (2:2) + (2·2) = 5

Leken går ut på at elevene eller grupper av elever stiller opp i rekke og lager et regnestykke som stemmer.

Forsøk å besvare følgende spørsmål:

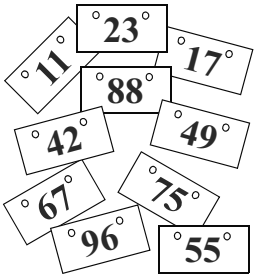
- *Hvordan vil du dele opp klassen i grupper (én gruppe eller flere)?*
- *Hvilke tall vil du lage til på forhånd?*
- *Hvor mange tegn av hvert slag skal legges ut?*
- *Hvordan vil du organisere leken slik at den fungerer best mulig?*
- *Hvordan vil du fordele lappene på gruppen(e)?*
- *Skal det være konkurranse eller lek, ev. hvordan fordele poeng?*

Prøv å være kreativ, og finn en måte som fungerer.

2.1.5 Summering av tall

Det dannes lag med for eksempel tre deltagere på hvert lag. Lagene har fått utdelt ti tall hver. Konkurranselederen har bestemt fem summer som det er mulig å danne ved å legge sammen et utvalg av de tallene deltagerne har fått utlevert.

Et eksempel kan være at alle lagene har fått utdelt tallene: 11, 17, 23, 42, 49, 55, 67, 75, 88 og 96, mens konkurranselederen har valgt følgende summer:



Deltagerne får utlevert ti lapper med forskjellige tall

119 (svaret kan for eksempel være 11 + 17 + 42 + 49)
326 (svaret kan for eksempel være 67 + 75 + 88 + 96)
181 (svaret kan for eksempel være 17 + 42 + 55 + 67)
190 (svaret kan for eksempel være 49 + 55 + 75 + 11)
199 (svaret kan for eksempel være 11 + 17 + 75 + 96)

En bør også undersøke om noen av svarene kan lages med andre kombinasjoner av de tallene deltagerne har fått utdelt. Den som blir først ferdig får poeng.

2.2 Matematiske kortkunster

Enkelte kortkunster er matematiske i sin natur, og egner seg godt som små prosjektoppgaver for flinke elever. Vis dem kortkunsten, og utfordre dem til å finne ut hvordan den fungerer. I dette kapittelet vil vi vise noen kortkunster, for deretter å bruke enkel matematikk for å forstå og videreutvikle kunstene.

2.2.1 Alltid like mange kort i begge bunkene

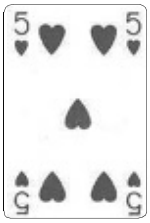
La oss nå se på en relativt enkel, men likevel ganske forbløffende kortkunst.

Ta en vanlig kortstokk med 52 kort. Be en venn ta ut 13 tilfeldige kort av kortstokken. Det kan godt være de 13 øverste i bunken.

Du ber ham snu de 13 utplukkede kortene, og legge dem inn i kortstokken på tilfeldige steder, med bildesiden opp.



39 kort med bildesiden *ned*



13 kort med bildesiden *opp*

Din venn kan gjerne blande kortene, slik at de 13, med bildesiden opp, blir spredt utover.

Du ber så din venn om å ta av de 13 øverste kortene i kortstokken, slik at det igjen blir to bunker med kort. Blant de 13 utvalgte vil det sannsynligvis også være noen som ligger med bildesiden opp.

Be så din venn om å legge de to bunkene under et tørkle slik at han ikke kan se hva du gjør med bunkene med kort.

Når så tørkleet fjernes, ligger det fortsatt to bunker der. Du ber din venn om å telle kortene med bildesiden opp i hver av de to bunkene. Han vil da oppdage at det i begge bunkene ligger like mange kort med bildesiden opp.

Du kan nå gjenta trikset, og din venn vil oppdage at det hver gang ligger like mange kort med bildesiden opp i begge bunkene.

Hva gjør du under tørkleet?

Oppgave:

Gjør kortkunsten for elevene, og be dem foreslå hva det er du gjør under tørkleet.

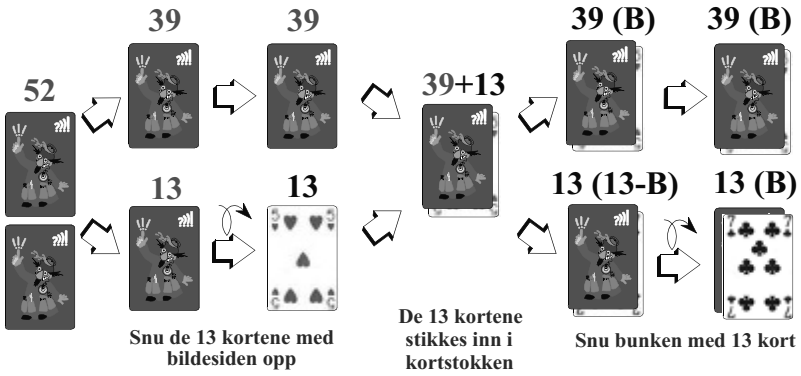
Løsning

Hva er det så som foregår under tørkleet? Det er lite sannsynlig at du teller antall kort med bildesiden opp i den ene bunken, for så å snu det riktige antallet kort i den andre bunken, slik at antall med bildesiden opp blir likt.

Det du gjør, er langt enklere. Du bare finner bunken med færrest antall kort, altså den med 13 kort, og snur denne bunken. Gjør du dette, vil antallet kort med bildesiden opp alltid bli likt i de to bunkene.

Hvorfor er det slik?

Fremgangsmåten er vist på figuren under.



B på figuren over angir antallet kort med bildesiden opp.

For å forstå hva som skjer, må vi innføre litt enkel matematikk.

Etter at vi har stukket de 13 kortene tilbake i kortstokken, vil den inneholde 39 kort med bildesiden ned, og 13 kort, tilfeldig plassert, med bildesiden opp.

Så tar vi ut 13 nye kort av bunken. Disse vil inneholde et tilfeldig antall kort med bildesiden opp. Dersom vi antar at det er igjen B antall kort med bildesiden opp i bunken med 39 kort, vil det, siden det totalt er 13 kort med bildesiden opp i de to bunkene til sammen, være igjen 13 – B kort med bildesiden opp i den vesle bunken. Det vil igjen si at det finnes 13 – (13 – B) kort med bildesiden ned, i denne bunken.

Forenkler vi dette uttrykket får vi:

$$13 - (13 - B) = B \tag{2.1}$$

Det vil si at den vesle bunken inneholder B kort med bildesiden ned.

Når vi så snur den vesle bunken, vil kortene med bildesiden ned bli kortene med bildesiden opp. Det vil si at antallet med bildesiden opp er lik B, som er det samme antallet med bildesiden opp i den store bunken på 39 kort.

Oppgave:

Be elevene tenke gjennom følgende to problemstillinger:
Vil kortkunsten fungere like godt dersom vi tar ut et annet antall kort enn 13?
Er det likegyldig hvor mange kort vi tar ut av kortstokken andre gang, etter at vi har lagt inn kortene med bildesiden opp?

Det er ikke noe magisk med tallet 13, vi kan for den saks skyld gjerne ta ut 15 eller 18 kort, og kortkunsten vil fungere like godt. Tar vi for eksempel ut 25 kort, vil vi imidlertid ha problemer med å kjenne hvilken av bunkene vi skal snu, siden vi alltid må snu den bunken som har det antallet kort som vi først plukket ut og snudde med bildesiden opp. Også dette burde gå greit, dersom vi bare holder rede på hvor mange kort det er i de to bunkene.

Kortkunsten blir heller ikke så imponerende dersom bunkene er omtrent like store. I det tilfellet vil det ikke virke like urimelig at antall kort med bildesiden opp er likt i de to bunkene.

Det blir heller ikke samme effekt om vi plukker ut et svært lite antall kort. Dersom vi for eksempel plukker ut *to* kort, er det lite sannsynlig at det blant disse er kort med bildesiden opp. Når så kledet fjernes, kan det virke ganske avslørende at begge kortene i bunkene nå plutselig ligger med bildesiden opp.

Den som fant på kortkunsten, har derfor, klokelig, valgt tallet 13, siden dette er et tall midt mellom halvparten av kortstokken (26 kort) og ett kort.

2.2.2 Hvilket kort ligger øverst i den siste bunken?

Ta en vanlig kortstokk og bland kortene. Snu det øverste kortet, og legg det ned på bordet med bildesiden opp. La oss anta at kortet er en femmer (valøren er uten betydning). Legg så nye kort oppå femmeren med bildesiden opp, samtidig som du teller opp til 13. Det vil si at du legger åtte kort på toppen av femmeren.

Ta så av det neste kortet i kortstokken og snu det. La oss si at det er en knekt. Dette kortet bruker du ikke, men stikker det inn i kortstokken for senere bruk. Dette gjør du alltid dersom kortet er en tier eller høyere. Esset regnes som en.

Ta så av et nytt kort og legg det på bordet med bildesiden opp. La oss anta at dette er en treer. Du legger nå nye kort oppå treeren, med bildesiden opp, og teller opp til 13. Det vil si at du legger ti kort oppå treeren.

Slik fortsetter du å lage nye bunker helt til verdien på kortet du legger opp er slik at du ikke har nok kort igjen på hånda. La oss anta at du legger opp en sjuer, men har bare fire kort igjen på hånda. Dette er ikke nok til å telle opp til 13. I dette tilfellet beholdes sjueren og de resterende kortene på hånda.

La oss anta at du har seks bunker på bordet når du er ferdig. Snu så alle bunkene, slik at kortene blir liggende med bildesiden ned. Be en hjelper om å ta bort bunker, slik at det bare blir liggende tre igjen. Ta så de kortene han har plukket bort, og ta dem på hånda. Etter at dette er gjort, skal det ligge tre bunker med kort på bordet.

Be så hjelperen om å snu det øverste kortet på to av de tre bunkene. Han velger selv hvilke han vil snu. Du skal nå fortelle ham hvilket kort som ligger øverst i den siste bunken, hvor kortet ikke er snudd.

