Arne Hole

KALKULUS OG LINEÆR ALGEBRA

Bind 2, 2. utgave



Universitetsforlaget

Kalkulus og lineær algebra

Bind II

2. utgave

Arne Hole

Universitetsforlaget

© Aschehoug AS ved Universitetsforlaget, Oslo 2025
1. utgave 2023
2. utgave, 2. opplag 2025

ISBN 978-82-15-07326-2

Materialet er vernet etter åndsverkloven. Kopiering og tilgjengeliggjøring er ikke tillatt uten samtykke fra rettighetshaverne, avtale med Kopinor (www.kopinor.no) eller annen forvaltningsorganisasjon, eller hjemmel i lov. Forbudet gjelder også trening av, og annen bruk av materialet i, kunstig intelligens, og innebærer et uttrykkelig forbehold mot tekst- og datautvinning etter digitalmarkedsdirektivet artikkel 4.

Boken er utgitt med støtte fra Kunnskapsdepartementet ved Lærebokutvalget for høyere utdanning.

Henvendelser om boken kan rettes til
Universitetsforlaget
Postboks 508 Sentrum
0105 Oslo

www.universitetsforlaget.no

Omslag: Ellen Lorenzen
Sats: Arne Hole
Trykk og innbinding: Merkur Grafisk AS
Boken er satt med: Times New Roman PS MT 10/12 pkt.
Papir: 90 g Arctic Matt



FORORD

Den tekniske utviklingen har gjort at digitale læringsressurser spiller en helt annen rolle i dagens matematikkutdanning enn tidligere. Samtidig gjør den økte anvendelsen av matematikk i andre fag at læremidler gjerne spesialtilpasses ulike bruksområder knyttet til begrensede temaer.

I utgangspunktet er alt dette selvsagt positivt. Det som imidlertid kan være en fare, er at det resulterer i fragmentering. Mens spesiallagede kompendier, videoer og interaktive læringsplattformer tilknyttet avgrensede temaer kan være svært effektive og motiverende læringsarenaer, er de ofte mindre egnet til å vise det store bildet. Her er det at tradisjonelle fysiske lærebøker har sin styrke. Den oversikten det gir å bla i en matematikkbok man har arbeidet med og kjenner godt, er for mange vanskelig å oppnå på annen måte.

Kalkulus og lineær algebra er skrevet med tanke på utnyttelse av disse fordelene ved papirbøker. Boken består av to bind som utgjør en sammenhengende fremstilling. Prinsippene som har vært forsøkt fulgt, er:

(1) **Stoffet presenteres i logisk rekkefølge og bygges opp fra grunnen av**. En del av stoffet, særlig i de første kapitlene, er rent temamessig repetisjon fra videregående skole. Imidlertid vil du antakelig oppleve fremstillingen her som noe annerledes. Selv om repetisjonsstoffet neppe vil undervises detaljert i kurs der denne boken er aktuell som litteratur, er det viktig for forståelsen at du som student har det tilgjengelig. Boken skal kunne fungere som et oppslagsverk for grunnleggende matematikk.

(2) **Fremstillingen fokuserer på de faglige kjerneelementene**. Boken gir en gjennomgående stamme der det kan monteres «grener» bestående av nettressurser, supplerende teoretisk materiale og ekstra oppgavemateriell.

Innholdsmessig dekker bind I og II nok fagstoff til det som i dag typisk utgjør tre 10-studiepoengskurs på universitetsnivå: Ett i envariabelanalyse, ett i flervariabelanalyse og ett i lineær algebra. Tanken er at en sammenhengende fremstilling av disse temaene kan tegne et mer helhetlig bilde enn for eksempel tre ulike lærebøker kombinert med det man husker fra skolematematikken. Det gir også større fleksibilitet med hensyn til valg av stoffrekkefølge.

Hvordan arbeide med boken

Ikke regn med at du kan lese denne boken som en roman. Du må arbeide med teksten og fylle inn detaljer der det trengs. Blyant og papir ved siden av boken anbefales. I stedet for å fokusere på hva du **får til av oppgaver**, tenk på hva hva du **forstår av teorien**. Teoristoffet i boken er ikke der for å hjelpe deg å løse

oppgavene, det er omvendt: Oppgavene er der for å hjelpe deg å forstå teorien. Forstår du teorien, vil du se at du kan løse oppgaver også. Samt at du vil kunne bruke stoffet i andre sammenhenger, som er det egentlige målet.

I denne boken er det lagt vekt på at teksten, og kanskje særlig bevisene, skal ha et **detaljeringsnivå som passer for aktiv lesning**. Dette betyr at forklaringene skal ha nok detaljer til at det er mulig å jobbe seg gjennom dem, men at de ikke skal være overdetaljerte. Overdetaljert tekst kan føre til passiv pugging og dårligere læringsutbytte. Hvis det i et bevis står skrevet «Skjæringssetningen gir at ...», er tanken at du selv bør sjekke om forutsetningene i skjæringssetningen er oppfylt. For eksempel kan en slik forutsetning være at funksjonen det er snakk om, er kontinuerlig. Med høyere detaljeringsgrad kunne teksten sagt «Fordi f er kontinuerlig, gir skjæringssetningen at ...».

Det samme gjelder for **transformativ algebra**, som brukes så godt som overalt i boken. Du må regne med å måtte bruke blyant og papir for å fylle inn mellomregninger, slik at du forstår overgangene. Dette lærer du masse av, særlig hvis du sitter og **lider lenge** med noe du ikke forstår. Etter hvert vil du så kunne klare å se stadig flere slike omgjøringer uten ekstraarbeid.

Når du skal arbeide med bøker som denne, er det ellers viktig at du er klar over grunntrekkene ved systematisk oppbygd matematisk teori. Formelt sett består slik teori av tre typer byggeklosser, nemlig **definisjoner**, **teoremer** og **bevis**. Definisjoner er ting man har **funnet på**, mens teoremer er ting man har **funnet ut**. Hvert teorem trenger et bevis. Mer om dette i seksjon 1.1. Teoremer, definisjoner og eksempler er nummerert fra 1 i hver seksjon, og de refereres så til ved kapittelnummer, seksjonsnummer og sitt eget nummer. Så «teorem 6.3.2» betyr teorem 2 i seksjon 6.3. Oppgaver med en ramme rundt nummeret, for eksempel 7., utforsker ekstra teori. Oppgaver med rød ramme rundt nummeret, for eksempel 7., brukes i hovedteksten.

Notasjon

Som kjent brukes bokstaver svært mye i matematisk notasjon, og da er det fint å ha så mange bokstaver som mulig å velge blant. Derfor brukes også det greske alfabetet til å variere med:

α	A	alfa	η	H	eta	ν	N	ny	τ	T	tau
β	B	beta	θ	Θ	theta	ξ	Ξ	ksi	υ	Υ	ypsilon
γ	Γ	gamma	ι	I	iota	o	O	omikron	ϕ	Φ	phi
δ	Δ	delta	κ	K	kappa	π	Π	pi	χ	X	kji
ε	E	epsilon	λ	Λ	lambda	ρ	P	rho	ψ	Ψ	psi
ζ	Z	zeta	μ	M	my	σ	Σ	sigma	ω	Ω	omega

Notasjonsmessig følger denne boken vanlig standard, men det er et unntak: Det brukes **desimalpunkt** istedenfor desimalkomma. Dette betyr at desimaltallet 2,5 her skrives 2.5 (les: to punkt fem), som er vanlig internasjonalt. Fordelen er at man da unngår å forveksle desimalkomma med komma brukt som skilletegn.

Det er tvetydig hvis punktet (2.8, 0.6) i planet blir skrevet (2,8,0,6).

Noen forkortelser som brukes, er «dvs.» (det vil si), «mhp.» (med hensyn på), «hhv.» (henholdsvis), «pr. definisjon» (per definisjon, som betyr at dette er det definisjonen sier).

Ressurser på bokens produktside

Fasit/hint/løsningsforlag til oppgavene i boken fins som et gratis hefte du kan laste ned fra bokens produktside hos www.universitetsforlaget.no :

Bind I: https://www.universitetsforlaget.no/kalkulus-og-lineaer-algebra-3

Bind II: https://www.universitetsforlaget.no/kalkulus-og-lineaer-algebra-2

På samme nettsider ligger heftet **Utfyllende stoff**, som blant annet innholder noen ekstra teoretiske beviser som er utelatt i hovedteksten. Det henvises til seksjoner i dette heftet med bokstaven U, slik at «U-seksjon 1.2» er seksjon 1.2 i heftet med utfyllende stoff.

Produktsidene har også lenker til andre gratisressurser som kan brukes sammen med boken.

Takk

Først og fremst takk for tilbakemeldinger, råd og tips fra alle studenter som gjennom mer enn 30 år har brukt ulike versjoner av biter og utdrag fra dette manuset. Jeg har brukt deler av denne teksten til alt fra forelesningsnotater til kompendier og lærebøker, både på Mat.Nat./UiO og innen lærerutdanning. En spesiell takk til studentene på kursene MAT1100 høst 2022 og MAT1120 høst 2023 ved Universitetet i Oslo for den store innsatsen i konkurransen om å finne flest trykkfeil i henholdsvis det foreløpige manuset og første utgave av denne boken. Stor takk også til de mange kolleger som jeg gjennom årene har diskutert med og fått tilbakemeldinger fra. Den som har påvirket dette manuset mest, selv om han aldri har lest det, er nok Einar Jahr. I sluttfasen har jeg fått mange gode innspill fra blant annet Jørgen Endal Letnes, Marius Thaule og Mats Ehrnström.

TEX-oppsettet jeg har brukt til typesetting og formgiving, er opprinnelig basert på uvurderlig hjelp fra Arve Michaelsen. Tusen takk, Arve.

Endelig vil jeg takke Universitetsforlaget for støtte og entusiasme gjennom alle år. Her må nevnes både min nåværende redaktør Kristin Beatrice Berg og mine tidligere redaktører Jannicke Bærheim, Geir Tufteland og Eli Valheim, som alle har hatt med deler av dette manuset å gjøre i ulike bokprosjekter.

Oslo, april 2025
Arne H.

INNHOLD

1 Skalarfunksjoner 1

1.1 Introduksjon *1*
1.2 Omegner og åpne mengder *6*
1.3 Grenser og kontinuitet *10*
1.4 Ekstremalpunkter *14*
1.5 Partielle deriverte *16*
1.6 Andrederiverttesten *26*
1.7 Ekstra oppgaver til kapitlet *30*

2 Vektorfunksjoner 31

2.1 Vektorfunksjoner *31*
2.2 Gradienter og retningsderiverte *39*
2.3 Kjerneregelen *42*
2.4 Taylorrekker og Taylors formel *46*
2.5 Inverse funksjoner *51*
2.6 Implisitte funksjoner *52*
2.7 Newtons metode i flere variable *58*
2.8 Iterasjon *62*
2.9 Lagranges multiplikatormetode *66*
2.10 Ekstra oppgaver til kapitlet *71*

3 Kurver, flater og koordinatsystemer 73

3.1 Kjeglesnitt *73*
3.2 Geometriske egenskaper ved kjeglesnittene *78*
3.3 Parametriserte kurver *83*
3.4 Noen andregradsflater i rommet *91*
3.5 Sylinderkoordinater og kulekoordinater *94*
3.6 Parametriserte flater *96*
3.7 Generelt om koordinatsystemer *102*
3.8 Ekstra oppgaver til kapitlet *106*

4 Integrasjon av skalarfunksjoner 107

4.1 Dobbeltintegraler *107*
4.2 Dobbeltintegraler som itererte integraler *116*
4.3 Variabelskifte i dobbeltintegraler *122*
4.4 Trippelintegraler *126*
4.5 Generelt om multiple integraler *137*

4.6 Kurveintegraler *140*
4.7 Flateintegraler *144*
4.8 Ekstra oppgaver til kapitlet *149*

5 Vektoranalyse 153
5.1 Vektorfelter *154*
5.2 Arbeid *160*
5.3 Greens teorem *168*
5.4 Divergens og curl *173*
5.5 Fluks *176*
5.6 Divergensteoremet *179*
5.7 Stokes' teorem *185*
5.8 Ekstra oppgaver til kapitlet *193*

6 Reelle vektorrom 195
6.1 Aksiomatisering av reelle vektorrom *195*
6.2 Lineærtransformasjoner *204*
6.3 Kjerne, rekkevidde og inverse *208*
6.4 Koordinatvektorer og matriserepresentasjoner *216*
6.5 Overgangsmatriser *223*
6.6 Egenverdier og egenrom *226*
6.7 Similære matriser *230*
6.8 Diagonalisering *232*
6.9 Anvendelse: Lineære differensialligningssystemer *237*
6.10 Anvendelse: Lineære differensialligninger *244*
6.11 Anvendelse: Lineære differensligninger *246*
6.12 Anvendelse: Markovkjeder *248*
6.13 Anvendelse: Potensmetoden *250*
6.14 Ekstra oppgaver til kapitlet *252*

7 Reelle indreproduktrom 253
7.1 Indreprodukter *253*
7.2 Gram–Schmidt-prosessen *260*
7.3 Projeksjoner *263*
7.4 Symmetriske lineærtransformasjoner *270*
7.5 Ortogonale lineærtransformasjoner *273*
7.6 Singulærverdidekomposisjon *278*
7.7 Tilnærmet løsning av ligningssystemer *280*
7.8 Anvendelse: Minste kvadraters metode *282*
7.9 Anvendelse: Kvadratiske former *284*
7.10 Ekstra oppgaver til kapitlet *289*

8 Kompleks lineær algebra 291

8.1 Komplekse vektorrom *291*
8.2 Komplekse indreproduktrom *296*
8.3 Hermitiske og unitære transformasjoner *301*
8.4 Anvendelse: Komplekse differensialligningssystemer *309*
8.5 Ekstra oppgaver til kapitlet *312*

9 Laplace- og fourieranalyse 313

9.1 Laplacetransformen *313*
9.2 Anvendelse: Differensialligninger *320*
9.3 Heavisidefunksjonen og forskyvning *322*
9.4 Integrasjon og konvolusjon *324*
9.5 Diracs deltafunksjon *326*
9.6 Fouriertilnærming *330*
9.7 Kompleks fouriertilnærming *334*
9.8 Fourierrekker *339*
9.9 Fouriertransformen *342*
9.10 Anvendelse: Partielle differensialligninger *348*
9.11 Ekstra oppgaver til kapitlet *355*

Stikkordliste 356

KAPITTEL 1

SKALARFUNKSJONER

1.1 Introduksjon

I bind I jobbet vi med funksjoner

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

og mer generelt funksjoner $f : D_f \to \mathbb{R}$ med definisjonsmengde $D_f \subseteq \mathbb{R}$. Vi kalte disse *funksjoner av én variabel*. En mer presis betegnelse er *skalarfunksjoner* av én variabel. Som nevnt i bind I, er *skalar* et synonym for *tall*. Ordet *skalarfunksjon* henspeiler på at funksjonsverdiene til slike funksjoner er tall, og ikke for eksempel vektorer.

I dette kapitlet skal vi utvide teorien til funksjoner

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

der $n \geq 1$ er et helt tall, og mer generelt funksjoner f med $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ og $V_f \subseteq \mathbb{R}$.

DEFINISJON 1

Skalarfunksjoner

La $n \geq 1$ være et helt tall. En **skalarfunksjon av n variable**, også kalt et **skalarfelt**, er en funksjon

$$f : D_f \to \mathbb{R} \qquad \text{der} \quad D_f \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Hvis $n > 1$, kalles slike funksjoner også for «funksjoner av flere variable».

I eksemplene våre vil skalarfunksjoner f typisk være gitt ved en formel som gir oss funksjonsverdien

$$f(x_1, \ldots, x_n)$$

til hvert punkt $(x_1, \ldots, x_n) \in D_f$. Hvis D_f ikke er oppgitt, underforstår vi at D_f er mengden av alle $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ der formelen gir mening.

EKSEMPEL 1 Betrakt skalarfunksjonen f av tre variable gitt ved

$$f(x, y, z) = x^2z - 2y$$

Formelen for $f(x, y, z)$ gir mening for alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, så det er underforstått at

$$D_f = \mathbb{R}^3$$

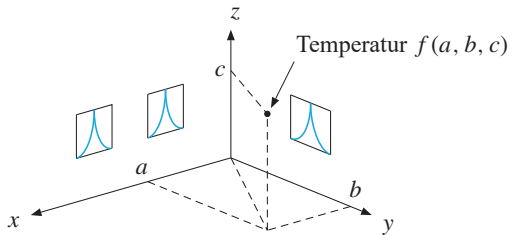
For eksempel er

$$f(1, 3, 2) = 1^2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = -4 \quad \blacksquare$$

Variable og variabler

Flere variable er i vår sammenheng en forkortelse for *flere variable størrelser*. Vi kan også snakke om *funksjoner av flere variabler*. Da er «variabler» flertall av *en variabel*. Dette henspiller på at vi vanligvis skriver funksjoner av flere variable med flere *variabler* x, y, z osv. Substantivet *variabel* er et *syntaktisk* begrep. En variabel er et *symbol* som brukes til å betegne variable størrelser.

Hva kan funksjonen f fra eksempel 1 representere i praksis? Vel, for eksempel kunne vi tenke oss at $f(x, y, z)$ målte temperaturen som funksjon av posisjonen (x, y, z) i en stor sal, med koordinatsystemet lagt som på figuren under. For denne anvendelsens skyld ville det være naturlig å begrense D_f til mengden av punkter (x, y, z) som faller innenfor rommets vegger.



Figur 1.1.1 Tredimensjonalt koordinatsystem

Ovenfor regnet vi altså ut at temperaturen i punktet $(1, 3, 2)$ er $-4°$. Om det er mulig å arrangere et system av ovner etc. i et rom slik at vi får denne litt rare varmefordelingen, tar vi ikke stilling til!

EKSEMPEL 2 Betrakt funksjonen g av fire variable gitt ved

$$g(x, y, z, t) = (x^2z - 2y)\sqrt{t}$$

Det største mulige definisjonsområdet til funksjonen g blir mengden av alle punkter $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ slik at

$$t \geq 0$$

Hva kan så g representere? Tja, tenk deg at temperaturfordelingen i salen fra eksempel 1 egentlig *endrer seg med tiden*, og at $g(x, y, z, t)$ gir temperaturen i posisjon (x, y, z) ved tidspunkt t, for $t \geq 0$. Funksjonen $f(x, y, z)$ fra eksempel 1 gir oss da øyeblikksbildet ved $t = 1$; vi har nemlig

$$g(x, y, z, 1) = f(x, y, z) \quad \blacksquare$$

Grafene til skalarfunksjoner

De funksjonene av flere variable som er lettest å fremstille grafisk, er skalarfunksjoner f av to variable. For disse kan vi nemlig tegne *grafen* på en måte som er analog til det man gjør for funksjoner av én variabel. Vi tenker oss da at planet

$$\mathbb{R}^2$$

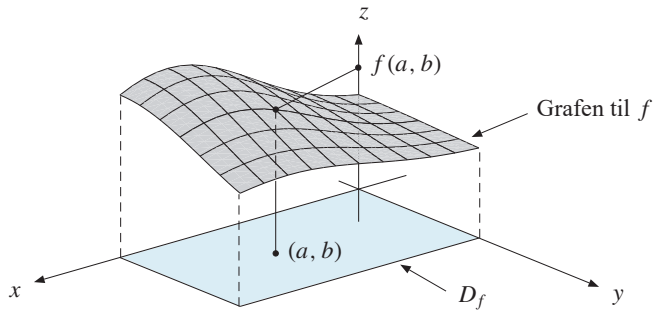
er lagt inn i rommet $\mathbb{R}^3$ i form av xy-planet. Definisjonsområdet D_f til funksjonen blir da en delmengde av xy-planet, og vi kan bruke z-aksen til å måle funkjsonsverdiene til f. Grafen til f blir da en flate i rommet bestående av alle punkter

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

som oppfyller

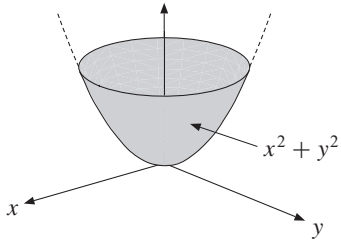
$$z = f(x, y)$$

med $(x, y) \in D_f$. Se figur 1.1.2.



Figur 1.1.2 Grafen til en skalarfunksjon f av to variable

Altså: For å finne funksjonsverdien $f(a, b)$ i et gitt punkt (a, b) går du vertikalt opp fra (a, b) til du treffer grafen, og deretter horisontalt bort til z-aksen. Så funksjonsverdien $f(a, b)$ er høyden fra (a, b) opp til grafen.



Figur 1.1.3

EKSEMPEL 3 Grafen til funksjonen

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

blir flaten bestående av alle punkter $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ som oppfyller

$$z = x^2 + y^2$$

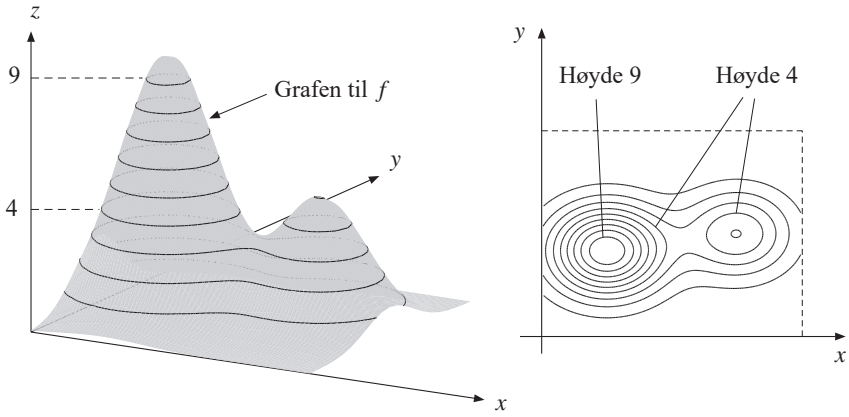
Denne flaten er er illustrert på figur 1.1.3. ■

Nivåkurver

Når vi skal tegne grafen til en skalarfunksjon f av to variable, er det ofte lurt å først skissere noen av **nivåkurvene** til f. Med *nivåkurven i høyde c* mener man mengden av alle punkter $(x, y) \in D_f$ slik at

$$f(x, y) = c$$

Å tegne en del slike kurver for ulike verdier av c svarer til å tegne et topografisk kart (orienteringskart) over grafen til f. Nivåkurvene ligger i planet og er høydekurver for «landskapet» som grafen tilsvarer. Figuren til høyre nedenfor viser nivåkurver for grafen på figuren til venstre.



Figur 1.1.4 Nivåkurver for en skalarfunksjon f av to variable

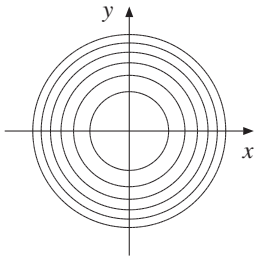
EKSEMPEL 4 La oss som et helt konkret eksempel tegne noen nivåkurver for funksjonen

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

fra eksempel 3. Vi velger oss da noen verdier av c og setter opp ligningen $f(x, y) = c$:

$c = 0$	gir $x^2 + y^2 = 0$	(kurven består av origo alene)
$c = 1$	gir $x^2 + y^2 = 1$	(sirkelen om origo med radius 1)
$c = 2$	gir $x^2 + y^2 = 2$	(sirkelen om origo med radius $\sqrt{2}$)

Vi skjønner nå at bildet blir som vist til høyre. For $c < 0$ får vi ingen løsninger, dvs. ingen kurve. Sammenlign bildet her med grafen på figur 1.1.3 nederst forrige side. ■



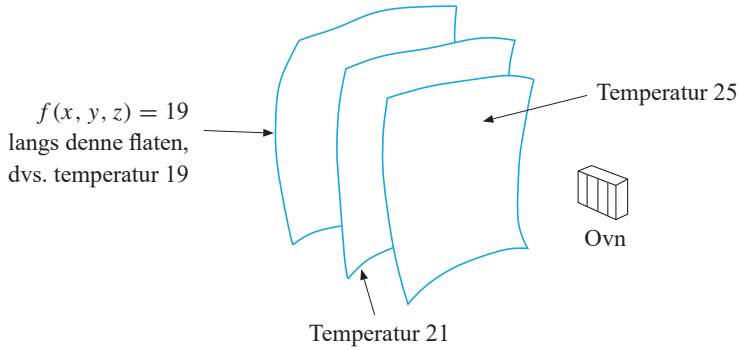
Figur 1.1.5 Nivåkurver for skalarfunksjonen $f(x, y) = x^2 + y^2$

Generelt om nivåmengder

For skalarfunksjoner f av tre eller flere variable kan vi ikke tegne grafen slik som i tilfellet to variable, rett og slett fordi vi ikke har nok akser i vårt fysiske, 3-dimensjonale rom. Men vi kan likevel definere en generell analogi til begrepet nivåkurve: Hvis f er en skalarfunksjon av n variable og c er et reelt tall, så kalles mengden av punkter $(x_1, \ldots, x_n) \in D_f$ slik at

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c$$

for **nivåmengden** til f tilsvarende verdien c. Hvis $n = 2$, kalles altså nivåmengden for en nivåkurve. Hvis $n = 3$, blir nivåmengdene delmengder av $\mathbb{R}^3$, og kalles **nivåflater**. Disse flatene er det mulig å tegne. Hvis vi igjen tenker oss at $f(x, y, z)$ representerer temperaturen i et rom som funksjon av posisjonen (x, y, z), så vil flaten $f(x, y, z) = c$ bestå av de punktene i rommet som har temperatur c. Ved å tegne noen slike flater i rommet kan man illustrere hvordan temperaturen varierer rundt omkring. Se figur under.



Figur 1.1.6 Nivåflater for en skalarfunksjon f av tre variable

1.1 OPPGAVER

1. Finn det største området $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ som hver av funksjonene f kan være definert på.

a) $f(x, y) = \sqrt{1 - xy}$ b) $f(x, y) = \dfrac{1}{x + y}$

c) $f(x, y) = \ln(y - 2x)$ d) $f(x, y) = e^{-x^2-y}$

2. Finn det største mulige definisjonsområdet D_f i $\mathbb{R}^3$ for $f(x, y, z) = \ln\sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$.

3. Skisser noen typiske nivåkurver for følgende funksjoner:

a) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ b) $f(x, y) = x^2 - y^2$

c) $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ d) $f(x, y) = 2x - 4y$

4. For å skaffe seg oversikt over funksjoner f av to variable, er det av og til smart å uttrykke $f(x, y)$ ved polarkoordinatene r, θ til x og y. Eksempel: Hvis $f(x, y) = x^2 + y^2$, så er $f(x, y) = r^2$, kort og godt. Gjør tilsvarende for funksjonene i oppgave 3, dvs. sett inn $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$ i funksjonsuttrykkene.

5. La $f(x, y, z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ være definert for $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Hvordan ser nivåflatene til f ut?

6. La $f(x, y, z) = z(x^2 + y^2)^{-1/2}$ være definert i punktene der x og y ikke begge er 0. Hvordan ser nivåflatene til f ut?

1.2 Omegner og åpne mengder

Hvis $A_1, \ldots, A_n$ er delmengder av $\mathbb{R}$, definerer vi **produktet** av dem som mengden $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \subseteq \mathbb{R}^n$ definert ved

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{\, (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \in A_i \text{ for hver } i \,\}$$

Videre innfører vi følgende konvensjon: Hvis $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, så betrakter vi objektet $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ som identisk med elementet

$$(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$$

Eksempel: Hvis $\mathbf{a} = (2, 0)$ og $\mathbf{b} = (1, 1, 5)$, så er

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (2, 0, 1, 1, 5)$$

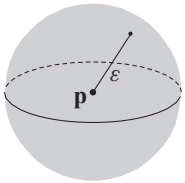
Fra definisjonen av $A \times B$ i bind I seksjon 1.15 fås da at hvis $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og $B \subseteq \mathbb{R}^m$, så er $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$.

EKSEMPEL 1 Hvis $A = [0, 3]$, $B = [0, 1]$ og $C = [0, 2]$, så er produktet $A \times B \times C$ den rettvinklede kassen i $\mathbb{R}^3$ bestående av alle punkter (x, y, z) slik at $x \in [0, 3]$, $y \in [0, 1]$ og $z \in [0, 2]$. ■

Baller og rektangler

La $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, og la $\varepsilon > 0$. Med den **åpne ballen** med sentrum $\mathbf{p}$ og radius ε menes mengden

$$B(\mathbf{p}; \varepsilon) = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \mid \quad |\mathbf{q} - \mathbf{p}| < \varepsilon\}$$



Figur 1.2.1 En ball med sentrum $\mathbf{p}$ og radius ε

Så ballen B består av alle punkter som har avstand mindre enn ε til $\mathbf{p}$. Se figur 1.2.1. Tilsvarende definerer vi den **lukkede** ballen $\overline{B}(\mathbf{p}; \varepsilon)$ med sentrum $\mathbf{p}$ og radius ε ved å bytte «$<$» med «$\leq$» i definisjonen ovenfor.

Med et **åpent rektangel** i $\mathbb{R}^n$ menes en mengde på formen

$$R = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

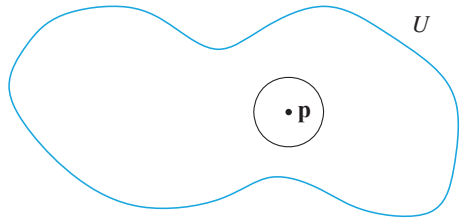
Tilsvarede definerer vi et **lukket** rektangel ved å bytte ut de åpne intervallene (a_j, b_j) med lukkede $[a_j, b_j]$. Rektangler i $\mathbb{R}^2$ er rektangler med sider parallelle med koordinataksene, og rektangler i $\mathbb{R}^3$ er kasser med sider parallelle med **koordinatplanene**, altså xy-planet, xz-planet og yz-planet. Se figur 1.2.2. Med **sentrum** i rektanglet R menes punktet $\left(\, \frac{1}{2}(a_1 + b_1) \,,\, \ldots \,,\, \frac{1}{2}(a_n + b_n) \,\right)$.



Figur 1.2.2 Rektangler

Omegner. Åpne og lukkede mengder

En mengde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ kalles en **omegn** om punktet $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ hvis U inneholder en åpen ball med sentrum $\mathbf{p}$. Se figur 1.2.3.



Figur 1.2.3 Mengden U er en omegn om $\mathbf{p}$

Et punkt $\mathbf{p}$ kalles et **indre punkt** i en mengde $M \subseteq \mathbb{R}^n$ hvis M er en omegn om $\mathbf{p}$. Mengden av indre punkter i M kalles **det indre** av M, og skrives M^*. Med **randen** ∂M til M menes mengden av punkter $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ som hverken ligger i det indre av M eller i det indre av $\mathbb{R}^n \setminus M$. Unionen $M \cup \partial M$ kalles **tillukningen** til M. Hvis $M^* = M$, kalles M **åpen**. Hvis $\mathbb{R}^n \setminus M$ er åpen, kalles M **lukket**. Et punkt $x \in \mathbb{R}^n$ kalles et **opphopningspunkt** for mengden M hvis alle omegner om x inneholder uendelig mange punkter fra M. Hvis $x \in M$ og det fins en omegn om x som ikke inneholder andre punkter fra M enn x selv, kalles x **isolert** i M.



Figur 1.2.4 Randen til M og det indre av M

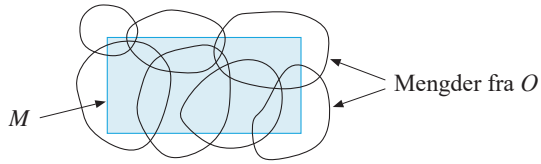
Det går an å overbevise seg om at med disse definisjonene av «åpen» og «lukket» er de «åpne» ballene og rektanglene fra forrige avsnitt virkelig åpne, og de «lukkede» ballene og rektanglene er virkelig lukkede. (Hvis du vil ha et formelt bevis, så bruk trekantulikheten fra teorem 4.1.1 i bind I.)

Begrensethet og kompakthet

La $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Hvis det fins et lukket rektangel $R \subseteq \mathbb{R}^n$ slik at $M \subseteq R$, kalles M **begrenset**. Hvis M er både lukket og begrenset, kalles M **kompakt**.

EKSEMPEL 2 Mengden $D = [0, 1] \times [0, 1)$ er en begrenset delmengde av $\mathbb{R}^2$. Vi kan nemlig lett finne et lukket rektangel R som inneholder den, ta f.eks. $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Men D er ikke kompakt siden den ikke er lukket. Derimot er $R = [0, 1] \times [0, 1]$ både lukket og begrenset, det vil si kompakt. ■

En samling O av mengder kalles en **overdekning** av mengden M hvis hvert punkt $\mathbf{p} \in M$ er med i en av mengdene fra O. Vi sier også at O **dekker** mengden M. Hvis alle mengdene i O er åpne, kalles O en **åpen** overdekning av M.



Figur 1.2.5 Samlingen O av mengder er en overdekning av mengden M

TEOREM 1

Kompakthetsteoremet

La $K \subseteq \mathbb{R}^n$ være kompakt, og la O være en åpen overdekning av K. Da fins et endelig utvalg $U_1, \ldots, U_k$ av mengder fra O som dekker K.

Du finner et bevis for dette teoremet i heftet med utfyllende stoff.

Følger i $\mathbb{R}^m$

La $k \in \mathbb{N}$. En **følge** i $\mathbb{R}^m$ med startindeks k er en funksjon $\mathbf{F}$ som til hvert naturlig tall $n \geq k$ tilordner et punkt $\mathbf{F}(n) \in \mathbb{R}^m$ som vi kan skrive $\mathbf{F}(n) = \mathbf{x}_n$. Du kan tenke på en slik følge som en uendelig lang liste av punkter i $\mathbb{R}^m$. Hvis startindeksen er 0, blir følgen

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \ldots$$

Jamfør seksjon 5.1. Vi bruker notasjonen $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$, der $\mathbf{x}_n$ kalles det n-te **leddet** i følgen. Følgen sies å **konvergere mot** punktet $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^m$, og vi skriver

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{L}$$

hvis det for hver $\varepsilon > 0$ fins en N slik at $|\mathbf{x}_n - \mathbf{L}| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$. Intuitivt er dette det samme som å si at $\mathbf{x}_n$ nærmer seg $\mathbf{L}$ når $n \to \infty$. Hvis følgen ikke konvergerer mot noe punkt $\mathbf{L}$, sier vi at den **divergerer**.

Begrepet **delfølge** for følger i $\mathbb{R}^m$ defineres på tilsvarende måte som for dimensjon $m = 1$, se seksjon 5.1.

TEOREM 2

Bolzano–Weierstrass i $\mathbb{R}^m$

En begrenset følge $\{\mathbf{x}_n\}$ i $\mathbb{R}^m$ har alltid en konvergent delfølge.

BEVIS Dette er analogt til beviset for $m = 1$, teorem 5.1.3 i bind I. Siden følgen $\{\mathbf{x}_n\}$ er begrenset, kan vi velge et lukket rektangel

$$R_1 = [a_{11}, b_{11}] \times \cdots \times [a_{1m}, b_{1m}]$$

som inneholder alle leddene i følgen. La oss si at den maksimale avstanden mellom to punkter i R_1 er d_1. Vi deler så R_1 opp i et endelig antall delrektangler slik at den maksimale avstanden d_2 mellom to punkter i hvert delrektangel oppfyller $d_2 \leq d_1/2$. Vi lar vårt neste rektangel

$$R_2 = [a_{21}, b_{21}] \times \cdots \times [a_{2m}, b_{2m}]$$

være et delrektangel som inneholder uendelig mange ledd i følgen. Slik fortsetter vi, og resultatet blir en liste $R_1, R_2, R_3, \ldots$ av stadig mindre rektangler inneholdt i hverandre. Vi definerer en delfølge $\{\mathbf{y}_n\}$ av følgen $\{\mathbf{x}_n\}$ ved å la $\mathbf{y}_j$ være det første leddet i følgen $\{\mathbf{x}_n\}$ som ligger i R_j. For å vise at følgen $\{\mathbf{y}_n\}$ konvergerer, er det nok å vise at hver komponentfølge $\{(\mathbf{y}_n)_i\}$ konvergerer. Men vi har $(\mathbf{y}_n)_i \geq a_{ni}$, og følgen $\{a_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ er voksende og oppad begrenset, så ved kompletthetsprinsippet 5.1.2 i bind I konvergerer den mot et reelt tall a_i. Men da må $\{(\mathbf{y}_n)_i\}$ også konvergere mot a_i. ■

En følge $\{\mathbf{x}_n\}$ i $\mathbb{R}^m$ kalles en **Cauchy-følge** hvis det for hver $\varepsilon > 0$ fins en N slik at $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_p| < \varepsilon$ for alle $n, p \geq N$.

TEOREM 3

Konvergens er ekvivalent med å være Cauchy

En tallfølge $\{\mathbf{x}_n\}$ i $\mathbb{R}^m$ konvergerer hvis og bare hvis den er en Cauchy-følge.

BEVIS Dette er analogt til beviset for $m = 1$, teorem 5.1.4 i bind I. ■

1.2 OPPGAVER

1. Vis at $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ er en omegn om punktet $(2, 2)$. Hint: Finn en åpen ball $U \subseteq M$ med sentrum $(2, 2)$.

2. Vis at $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0\}$ er en omegn om punktet $(1/2, 2, 1)$.

3. Avgjør hvilke av følgende delmengder av $\mathbb{R}^2$ som er åpne, lukkede og/eller kompakte.

a) $\{(x, y) \mid y \leq 0\}$
b) $\{(x, y) \mid 0 < x < 1\}$
c) $\{(x, y) \mid 0 \leq x < 1\}$
d) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

1.3 Grenser og kontinuitet

I denne seksjonen skal vi innføre begrepene *grense* og *kontinuitet* for skalarfunksjoner f av n variable. Betydningen av disse begrepene er helt tilsvarende som i envariabeltilfellet.

- At $f(\mathbf{x})$ går mot L som grense når $\mathbf{x}$ går mot $\mathbf{a}$, betyr at $f(\mathbf{x})$ nærmer seg L når $\mathbf{x}$ velges stadig nærmere $\mathbf{a}$.

Vi må bare huske på at her er $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ og $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ punkter i $\mathbb{R}^n$. Avstanden mellom $\mathbf{x}$ og $\mathbf{a}$ er $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|$, dvs. lengden av vektoren fra $\mathbf{a}$ til $\mathbf{x}$. Formell definisjon:

DEFINISJON 1

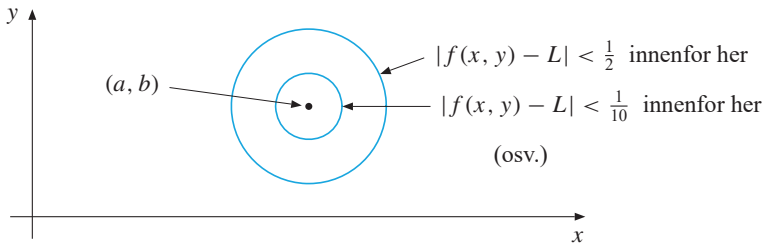
Grenseverdier for skalarfunksjoner

La f være en skalarfunksjon av n variable, la $\mathbf{a}$ være et opphopningspunkt for D_f, og la $L \in \mathbb{R}$. At

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$$

betyr at det for hver $\varepsilon > 0$ fins en $\delta > 0$ slik at $|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$ for alle $\mathbf{x} \in D_f \setminus \{\mathbf{a}\}$ som oppfyller $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$.

EKSEMPEL 1 På figuren under er illustrert hvordan situasjonen kan ta seg ut for en funksjon $f(x, y)$ av to variable når $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$.



Figur 1.3.1 Illustrasjon til epsilon-delta–definisjonen av $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$

Til hver $\varepsilon > 0$ vil det finnes en $\delta > 0$ slik at når (x, y) ligger innenfor sirkelen med sentrum (a, b) og radius δ, er funksjonsverdien $f(x, y)$ nærmere L enn ε. Dette er illustrert for

$$\varepsilon = 1/2 \text{ og } \varepsilon = 1/10$$

på figuren. I den generelle notasjonen ovenfor er her altså $\mathbf{x} = (x, y)$ og $\mathbf{a} = (a, b)$. ■