

Arne Hole

# KALKULUS OG LINEÆR ALGEBRA

Bind 1, 2. udgave



Universitetsforlaget



# KALKULUS OG LINEÆR ALGEBRA

BIND I

2. UTGAVE

ARNE HOLE

Universitetsforlaget

© H. Aschehoug & Co. (W. Nygaard) AS ved Universitetsforlaget 2025

1. utgave 2023

ISBN 978-82-15-07325-5

Materialet i denne publikasjonen er omfattet av åndsverklovens bestemmelser. Uten særskilt avtale med rettighetshaverne er enhver eksemplarframstilling og tilgjengeliggjøring bare tillatt i den utstrekning det er hjemlet i lov eller tillatt gjennom avtale med Kopinor, interesseorgan for rettighetshavere til åndsverk. Utnyttelse i strid med lov eller avtale kan medføre erstatningsansvar og inn-dragning og kan straffes med bøter eller fengsel.

Henvendelser om boken kan rettes til  
Universitetsforlaget  
Postboks 508 Sentrum  
0105 Oslo

[www.universitetsforlaget.no](http://www.universitetsforlaget.no)

Omslag: Ellen Lorenzen  
Sats: Arne Hole  
Trykk og innbinding: Livonia Print, Latvia  
Boken er satt med: Times New Roman PS MT 10/12 pkt.  
Papir: 90 g Arctic Matt



## FORORD

Den tekniske utviklingen har gjort at digitale læringsressurser spiller en helt annen rolle i dagens matematikkutdanning enn tidligere. Samtidig gjør den økte anvendelsen av matematikk i andre fag at læremidler gjerne spesialtilpasses ulike bruksområder knyttet til begrensede temaer.

I utgangspunktet er alt dette selvsagt positivt. Det som imidlertid kan være en fare, er at det resulterer i fragmentering. Mens spesiallagede kompendier, videoer og interaktive læringsplattformer tilknyttet avgrensede temaer kan være svært effektive og motiverende læringsarenaer, er de ofte mindre egnet til å vise det store bildet. Her er det at tradisjonelle fysiske lærebøker har sin styrke. Den oversikten det gir å bla i en matematikkbok man har arbeidet med og kjenner godt, er for mange vanskelig å oppnå på annen måte.

*Kalkulus og lineær algebra* er skrevet med tanke på utnyttelse av disse fordelene ved papirbøker. Boken består av to bind som utgjør en sammenhengende fremstilling. Prinsippene som har vært forsøkt fulgt, er:

- (1) **Stoffet presenteres i logisk rekkefølge og bygges opp fra grunnen av.** En del av stoffet, særlig i de første kapitlene, er rent temamessig repetisjon fra videregående skole. Imidlertid vil du antakelig oppleve fremstillingen her som noe annerledes. Selv om repetisjonsstoffet neppe vil undervises detaljert i kurs der denne boken er aktuell som litteratur, er det viktig for forståelsen at du som student har det tilgjengelig. Boken skal kunne fungere som et oppslagsverk for grunnleggende matematikk.
- (2) **Fremstillingen fokuserer på de faglige kjerneelementene.** Boken gir en gjennomgående stamme der det kan monteres «grener» bestående av nettressurser, supplerende teoretisk materiale og ekstra oppgavemateriell.

Innholdsmessig dekker bind I og II nok fagstoff til det som i dag typisk utgjør tre 10-studiepoengskurs på universitetsnivå: Ett i envariabelanalyse, ett i flervariabelanalyse og ett i lineær algebra. Tanken er at en sammenhengende fremstilling av disse temaene kan tegne et mer helhetlig bilde enn for eksempel tre ulike lærebøker kombinert med det man husker fra skolematematikken. Det gir også større fleksibilitet med hensyn til valg av stoffrekkefølge.

## Hvordan arbeide med boken

Ikke regn med at du kan lese denne boken som en roman. Du må arbeide med teksten og fylle inn detaljer der det trengs. Blyant og papir ved siden av boken anbefales. I stedet for å fokusere på hva du **får til av oppgaver**, tenk på hva du **forstår av teorien**. Teoristoffet i boken er ikke der for å hjelpe deg å løse

oppgavene, det er omvendt: Oppgavene er der for å hjelpe deg å forstå teorien. Forstår du teorien, vil du se at du kan løse oppgaver også. Samt at du vil kunne bruke stoffet i andre sammenhenger, som er det egentlige målet.

I denne boken er det lagt vekt på at teksten, og kanskje særlig bevisene, skal ha et **detaljeringsnivå som passer for aktiv lesning**. Dette betyr at forklaringene skal ha nok detaljer til at det er mulig å jobbe seg gjennom dem, men at de ikke skal være overdetaljerte. Overdetaljert tekst kan føre til passiv pugging og dårligere læringsutbytte. Hvis det i et bevis står skrevet «Skjæringssetningen gir at ...», er tanken at du selv bør sjekke om forutsetningene i skjæringssetningen er oppfylt. For eksempel kan en slik forutsetning være at funksjonen det er snakk om, er kontinuerlig. Med høyere detaljeringsgrad kunne teksten sagt «Fordi  $f$  er kontinuerlig, gir skjæringssetningen at ...».

Det samme gjelder for **transformativ algebra**, som brukes så godt som overalt i boken. Du må regne med å måtte bruke blyant og papir for å fylle inn mellomregninger, slik at du forstår overgangene. Dette lærer du masse av, særlig hvis du sitter og **lider lenge** med noe du ikke forstår. Etter hvert vil du så kunne klare å se stadig flere slike omgjøringer uten ekstraarbeid.

Når du skal arbeide med bøker som denne, er det ellers viktig at du er klar over grunntrekkene ved systematisk oppbygd matematisk teori. Formelt sett består slik teori av tre typer byggeklosser, nemlig **definisjoner**, **teoremer** og **bevis**. Definisjoner er ting man har **funnet på**, mens teoremer er ting man har **funnet ut**. Hvert teorem trenger et bevis. Mer om dette i seksjon 1.1. Teoremer, definisjoner og eksempler er nummerert fra 1 i hver seksjon, og de refereres så til ved kapittelnummer, seksjonsnummer og sitt eget nummer. Så «teorem 6.3.2» betyr teorem 2 i seksjon 6.3. Oppgaver med en ramme rundt nummeret, for eksempel [7.], utforsker ekstra teori. Oppgaver med rød ramme rundt nummeret, for eksempel [7.], brukes i hovedteksten.

## Notasjon

Som kjent brukes bokstaver svært mye i matematisk notasjon, og da er det fint å ha så mange bokstaver som mulig å velge blant. Derfor brukes også det greske alfabetet til å variere med:

|                         |                            |                         |                               |
|-------------------------|----------------------------|-------------------------|-------------------------------|
| $\alpha$ A alfa         | $\eta$ H eta               | $\nu$ N ny              | $\tau$ T tau                  |
| $\beta$ B beta          | $\theta$ $\Theta$ theta    | $\xi$ $\Xi$ ksi         | $\upsilon$ $\Upsilon$ ypsilon |
| $\gamma$ $\Gamma$ gamma | $\iota$ I iota             | $o$ O omikron           | $\phi$ $\Phi$ phi             |
| $\delta$ $\Delta$ delta | $\kappa$ K kappa           | $\pi$ $\Pi$ pi          | $\chi$ X kj                   |
| $\varepsilon$ E epsilon | $\lambda$ $\Lambda$ lambda | $\rho$ P rho            | $\psi$ $\Psi$ psi             |
| $\zeta$ Z zeta          | $\mu$ M my                 | $\sigma$ $\Sigma$ sigma | $\omega$ $\Omega$ omega       |

Notasjonsmessig følger denne boken vanlig standard, men det er et unntak: Det brukes **desimalpunkt** istedenfor desimalkomma. Dette betyr at desimaltallet 2,5 her skrives 2.5 (les: to punkt fem), som er vanlig internasjonalt. Fordelen er at man da unngår å forveksle desimalkomma med komma brukt som skille tegn.

Det er tvetydig hvis punktet  $(2.8, 0.6)$  i planet blir skrevet  $(2,8,0,6)$ .

Noen forkortelser som brukes, er «dvs.» (det vil si), «mhp.» (med hensyn på), «hhv.» (henholdsvis), «pr. definisjon» (per definisjon, som betyr at dette er det definisjonen sier).

## Ressurser på bokens produkside

**Fasit/hint/løsningsforlag til oppgavene i boken** fins som et gratis hefte du kan laste ned fra bokens produkside hos [www.universitetsforlaget.no](http://www.universitetsforlaget.no) :

Bind I: <https://www.universitetsforlaget.no/kalkulus-og-lineaer-algebra-3>

Bind II: <https://www.universitetsforlaget.no/kalkulus-og-lineaer-algebra-2>

På samme nettsider ligger heftet **Utfyllende stoff**, som blant annet inneholder noen ekstra teoretiske beviser som er utelatt i hovedteksten. Det henvises til seksjoner i dette heftet med bokstaven U, slik at «U-seksjon 1.2» er seksjon 1.2 i heftet med utfyllende stoff.

Produktsidene har også lenker til andre gratisressurser som kan brukes sammen med boken.

## Takk

Først og fremst takk for tilbakemeldinger, råd og tips fra alle studenter som gjennom mer enn 30 år har brukt ulike versjoner av biter og utdrag fra dette manuset. Jeg har brukt deler av denne teksten til alt fra forelesningsnotater til kompendier og lærebøker, både på Mat.Nat./UiO og innen lærerutdanning. En spesiell takk til studentene på kursene MAT1100 høst 2022 og MAT1120 høst 2023 ved Universitetet i Oslo for den store innsatsen i konkurransen om å finne flest trykkfeil i henholdsvis det foreløpige manuset og første utgave av denne boken. Stor takk også til de mange kolleger som jeg gjennom årene har diskutert med og fått tilbakemeldinger fra. Den som har påvirket dette manuset mest, selv om han aldri har lest det, er nok Einar Jahr. I sluttfasen har jeg fått mange gode innspill fra blant annet Jørgen Endal Letnes, Marius Thaulé og Mats Ehrnström.

TEX-oppsettet jeg har brukt til typesetting og formgivning, er opprinnelig basert på uvurderlig hjelp fra Arve Michaelsen. Tusen takk, Arve.

Endelig vil jeg takke Universitetsforlaget for støtte og entusiasme gjennom alle år. Her må nevnes både min nåværende redaktør Kristin Beatrice Berg og mine tidligere redaktører Jannicke Bærheim, Geir Tufteland og Eli Valheim, som alle har hatt med deler av dette manuset å gjøre i ulike bokprosjekter.

# INNHold

|          |                                       |           |
|----------|---------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Grunnlagstoff</b>                  | <b>1</b>  |
| 1.1      | Matematisk teori og matematiske bevis | 1         |
| 1.2      | Mengder                               | 2         |
| 1.3      | Det reelle tallsystemet               | 4         |
| 1.4      | Regning med reelle tall               | 7         |
| 1.5      | Implikasjonspiler og ekvivalenspiler  | 12        |
| 1.6      | Rasjonale og irrasjonale tall         | 13        |
| 1.7      | Røtter                                | 15        |
| 1.8      | Polynomdivisjon                       | 17        |
| 1.9      | Ligninger                             | 19        |
| 1.10     | Induksjonsbevis                       | 22        |
| 1.11     | Summetegn                             | 24        |
| 1.12     | Kombinatorikk                         | 27        |
| 1.13     | Pascals trekant og binomialformelen   | 30        |
| 1.14     | Endelige geometriske rekker           | 32        |
| 1.15     | Plangeometri                          | 34        |
| 1.16     | Ekstra oppgaver til kapitlet          | 43        |
| <b>2</b> | <b>Funksjoner</b>                     | <b>44</b> |
| 2.1      | Generelt om funksjoner                | 44        |
| 2.2      | Ekspontialfunksjoner og logaritmer    | 50        |
| 2.3      | Trigonometriske funksjoner            | 53        |
| 2.4      | Polarkoordinater                      | 61        |
| 2.5      | Ekstra oppgaver til kapitlet          | 63        |
| <b>3</b> | <b>Matriser og ligningssystemer</b>   | <b>64</b> |
| 3.1      | Lineære ligningssystemer              | 64        |
| 3.2      | Gauss–Jordan-metoden                  | 66        |
| 3.3      | Matriser og determinanter             | 70        |
| 3.4      | Teori for determinanter               | 75        |
| 3.5      | Regning med matriser                  | 80        |
| 3.6      | Inverse av matriser                   | 86        |
| 3.7      | Eigenverdier og egenvektorer          | 92        |
| 3.8      | Diskrete dynamiske systemer           | 97        |
| 3.9      | Ekstra oppgaver til kapitlet          | 107       |

|          |                                               |            |
|----------|-----------------------------------------------|------------|
| <b>4</b> | <b>Vektorer og lineærtransformasjoner</b>     | <b>108</b> |
| 4.1      | Vektorregning                                 | 108        |
| 4.2      | Vektorproduktet                               | 114        |
| 4.3      | Plan                                          | 117        |
| 4.4      | Volumproduktet                                | 120        |
| 4.5      | Lineærkombinasjoner og underrom               | 122        |
| 4.6      | Matriser som lineærtransformasjoner           | 128        |
| 4.7      | Ekstra oppgaver til kapitlet                  | 133        |
| <b>5</b> | <b>Grenser og kontinuitet</b>                 | <b>135</b> |
| 5.1      | Følger                                        | 135        |
| 5.2      | Grenser og kontinuitet                        | 142        |
| 5.3      | Beregning av grenser                          | 150        |
| 5.4      | Nullpunkter og ekstremalpunkter               | 156        |
| 5.5      | Kontinuitet av inverse funksjoner             | 160        |
| 5.6      | Ekstra oppgaver til kapitlet                  | 161        |
| <b>6</b> | <b>Derivasjon</b>                             | <b>162</b> |
| 6.1      | Den deriverte                                 | 162        |
| 6.2      | Differensiell notasjon                        | 174        |
| 6.3      | Betydningen av den deriverte                  | 176        |
| 6.4      | Høyere ordens deriverte                       | 181        |
| 6.5      | Fysisk tolkning av derivasjon                 | 184        |
| 6.6      | Implisitt derivasjon                          | 187        |
| 6.7      | l'Hôpitals regel                              | 188        |
| 6.8      | Direkte bruk av definisjonen på den deriverte | 192        |
| 6.9      | Skråasymptoter                                | 194        |
| 6.10     | Hyperbolske funksjoner                        | 196        |
| 6.11     | Inverse hyperbolske funksjoner                | 198        |
| 6.12     | Newtons metode                                | 200        |
| 6.13     | Ekstra oppgaver til kapitlet                  | 202        |
| <b>7</b> | <b>Integrasjon</b>                            | <b>206</b> |
| 7.1      | Ubestemte integraler                          | 206        |
| 7.2      | Bestemte integraler                           | 208        |
| 7.3      | Analysens fundamentalteorem                   | 213        |
| 7.4      | Integrasjon ved substitusjon                  | 218        |
| 7.5      | Delvis integrasjon                            | 221        |
| 7.6      | Generelt om integrasjonsteknikker             | 223        |
| 7.7      | Trigonometriske integraler                    | 224        |
| 7.8      | Trigonometriske substitusjoner                | 226        |
| 7.9      | Integraler med andregradsuttrykk              | 228        |
| 7.10     | Delbrøkoppspalting                            | 230        |

|      |                                                |     |
|------|------------------------------------------------|-----|
| 7.11 | Uegentlige integraler                          | 233 |
| 7.12 | Numerisk integrasjon                           | 237 |
| 7.13 | Anvendelse: Buelengde                          | 240 |
| 7.14 | Anvendelse: Volum                              | 242 |
| 7.15 | Anvendelse: Flateareal                         | 248 |
| 7.16 | Teori for eksponentialfunksjoner og logaritmer | 250 |
| 7.17 | Ekstra oppgaver til kapitlet                   | 256 |

## **8 Komplekse tall . . . . . 257**

|     |                                 |     |
|-----|---------------------------------|-----|
| 8.1 | Hva er komplekse tall?          | 257 |
| 8.2 | Regning med komplekse tall      | 261 |
| 8.3 | Kvadratrotter av komplekse tall | 264 |
| 8.4 | n-te rotter av komplekse tall   | 266 |
| 8.5 | Andregradsligninger             | 269 |
| 8.6 | Algebraens fundamentalteorem    | 270 |
| 8.7 | Anvendelse: Differensligninger  | 274 |
| 8.8 | Ekstra oppgaver til kapitlet    | 282 |

## **9 Differensialligninger . . . . . 283**

|     |                                    |     |
|-----|------------------------------------|-----|
| 9.1 | Hva er en differensialligning?     | 283 |
| 9.2 | Lineære første ordens ligninger    | 286 |
| 9.3 | Separable første ordens ligninger  | 292 |
| 9.4 | Numeriske løsninger                | 296 |
| 9.5 | Andre ordens differensialligninger | 299 |
| 9.6 | Ekstra oppgaver til kapitlet       | 305 |

## **10 Rekker . . . . . 308**

|      |                                 |     |
|------|---------------------------------|-----|
| 10.1 | Generelt om rekker              | 308 |
| 10.2 | Konvergenstester for rekker     | 311 |
| 10.3 | Taylorrekker og taylorpolynomer | 322 |
| 10.4 | Potensrekker                    | 330 |
| 10.5 | Triksing med potensrekker       | 332 |
| 10.6 | Summering av rekker             | 338 |
| 10.7 | Ekstra oppgaver til kapitlet    | 341 |

## **Stikkordliste . . . . . 344**

# KAPITTEL 1

## GRUNNLAGSSTOFF

### 1.1

## Matematisk teori og matematiske bevis

Som nevnt i forordet består matematisk teori essensielt av tre ulike elementer: **definisjoner**, **teoremer** og **bevis**. Teoremer kalles også **setninger**, **lover** eller **resultater**. Definisjonene innfører ny terminologi, de beskriver det matematiske språket. Det gir ingen mening å bevise en definisjon, for definisjonen forteller bare om språklige og notasjonsmessige *valg* vi gjør. Teoremene representerer det matematiske «innholdet» i teorien, og til hvert av dem trengs et bevis. Beviset gir kort og godt en begrunnelse for at teoremet er riktig.

Røft sagt har den standarden for bevisførsel som brukes av matematikere i dag, vært enerådende i «vanlig» matematikk i drøyt 100 år. I forrige århundre ble det utviklet en teoretisk overbygning (*matematisk logikk*) som kobler denne standarden til «mekaniske» beviser som kan sjekkes av datamaskiner. Alt som er merket «bevis» i denne boken, er i prinsippet moderne beviser eller skisser av slike. Moderne matematiske beviser kalles også *stringente* eller *formelle* beviser.

### Den aksiomatiske metode

Den moderne matematiske bevisstandarden er uløselig knyttet til den såkalte *aksiomatiske metode*. Dette er en metode for teoribygging der man starter med et sett grunnleggende antakelser, såkalte **aksiomer**, som man antar at visse objekter har. Så utleder man flere egenskaper ved objektene på grunnlag av disse aksiomene.

Alt vi gjør i denne boken, vil rimelig greit kunne innpasses i en strengt aksiomatisk oppbygning. Imidlertid skal vi ikke gjøre alle detaljene i dette, det bringer oss for langt av gårde i forhold til bokens hovedsiktemål. Vi skal likevel bruke en eksplisitt aksiomatisk oppbygning i noen deler av boken, særlig i kapitlene om vektorrom i bind II.

## 1.2 Mengder

Intuitivt sett er begrepet «mengde» lett å forstå, en mengde er rett og slett en samling objekter. Objektene i mengden kalles **elementer** i mengden. Imidlertid ligger det logiske problemer lurende her. Hvis en mengde kan være en samling av «hva som helst», så må det også være tillatt for *mengder* å være elementer i andre mengder. Dermed kan vi for eksempel danne mengden  $M$  av alle mengder. Da er  $M$  et element i seg selv! Hvor skummelt dette er, ser vi ved å lage følgende variant: La  $D$  være mengden av alle mengder som ikke er element i seg selv, dvs. som er «normale». Men er da  $D$  element i seg selv? Anta at den er det. Da er  $D$  ikke kvalifisert til å være med i  $D$ , så den er ikke element i seg selv likevel. Anta så at  $D$  ikke er et element i seg selv. I så fall er den kvalifisert til å være med i  $D$ , så den er element i seg selv likevel. Dette gir en selvmotsigelse som kalles *Russells paradoks*.

Russells paradoks viser at vi ikke kan godta vilkårlige «samlinger» som mengder. Den vanlige måten å løse problemet på er å bruke et system av grunnleggende antakelser, altså *aksiomer*, for mengdelæren. Kun de samlingene hvis eksistens kan bevises ut fra aksiomene godtas da som mengder. Det fins aksiom-systemer som sikrer eksistens av alle mengder vi trenger i vanlig matematikk, og som samtidig (så vidt man vet!) er frie for selvmotsigelser. Derfor er det i praksis helt greit å tenke på en mengde som en samling objekter. Vi må bare passe på å ikke definere mengder som kan tenkes å inneholde seg selv som element. Og det trenger vi i praksis aldri gjøre.

Å skrive en mengde på **listeform** betyr å lage en liste med alle elementene i mengden. Man bruker da krøllparenteser foran og bak elementene. For eksempel har mengden

$$A = \{1, 2, 3\}$$

tallene 1, 2 og 3 som elementer. Den *tomme mengden* skrives  $\emptyset$ . Den har ingen elementer. Notasjonen

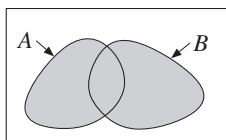
$$x \in A$$

betyr at  $x$  er element i mengden  $A$ . Tilsvarende betyr skrivemåten  $p, q, r \in A$  at  $p \in A$ ,  $q \in A$  og  $r \in A$ . Notasjonen  $x \notin A$  betyr at  $x$  ikke er element i mengden  $A$ . Skrivemåten

$$A \subseteq B$$

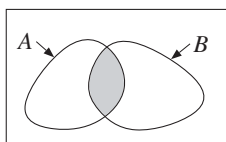
betyr at mengden  $A$  er inneholdt i mengden  $B$ , dvs. alle elementene i  $A$  er også elementer i  $B$ . Vi sier at  $A$  er en **delmengde** av  $B$ .

**EKSEMPEL 1** Hvis  $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$  og  $B = \{2, 4, 6\}$ , har vi for eksempel at  $4 \in A$  og  $7 \notin A$ . Vi kan også skrive  $2, 6 \in B$ , for tallene 2 og 6 er begge elementer i  $B$ . Mengden  $B$  er inneholdt i mengden  $A$ , dvs.  $B \subseteq A$ . Derimot er det *ikke* sant at  $A \subseteq B$ ; for eksempel er  $8 \in A$  og  $8 \notin B$ . ■



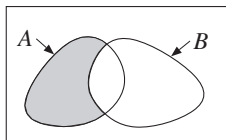
$$A \cup B$$

**Figur 1.2.1** Unionen av mengdene  $A$  og  $B$



$$A \cap B$$

**Figur 1.2.2** Snittet av mengdene  $A$  og  $B$



$$A \setminus B$$

**Figur 1.2.3** Mengde-differansen  $A$  minus  $B$

De følgende tre skrivemåtene brukes ofte. La  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  i eksemplene. Tegnet « $\neq$ » betyr «er ikke lik», og den vertikale streken kan leses «slik at».

- $\{x \mid \text{krav}\}$  Mengden av alle objekter  $x$  som er slik at «krav» er oppfylt. Eks:  $\{x \mid x \in A \text{ og } x \neq 2\} = \{1, 3, 4, 5\}$ . Leses «Mengden av alle  $x$  slik at  $x \in A$  og  $x \neq 2$ ».
- $\{x \in A \mid \text{krav}\}$  Mengden av alle objekter  $x \in A$  som er slik at «krav» er oppfylt. Eks:  $\{x \in A \mid x \neq 5\} = \{1, 2, 3, 4\}$ . Leses «Mengden av alle  $x \in A$  slik at  $x \neq 5$ ».
- $\{\text{form} \mid \text{krav}\}$  Mengden av alle objekter på formen «form» som oppfyller «krav». Eks:  $\{2 \cdot x \mid x \in A\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ . Leses «Mengden av alle  $2x$ , der  $x \in A$ ».

La nå  $A$  og  $B$  være to mengder. Vi definerer **unionen** av  $A$  og  $B$  som mengden  $A \cup B$  gitt ved

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ eller } x \in B\}$$

Unionen  $A \cup B$  består av alle objekter som er med i enten  $A$  eller  $B$  (eller begge), dvs.  $A \cup B$  er mengdene  $A$  og  $B$  slått sammen. Se figur 1.2.1. Vi definerer **snittet** av  $A$  og  $B$  som mengden  $A \cap B$  gitt ved

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ og } x \in B\}$$

Snittet  $A \cap B$  består av alle elementer som er *felles* for  $A$  og  $B$ . Se figur 1.2.2. Hvis  $A \cap B = \emptyset$ , sier vi at  $A$  og  $B$  er *disjunkte*. Videre definerer vi **differansen**  $A \setminus B$  ved

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Differansen  $A \setminus B$  består av alle elementer i  $A$  som ikke ligger i  $B$ . Se figur 1.2.3. Hvis  $B \subseteq A$ , kalles  $A \setminus B$  også for **komplementet** til  $B$  i mengden  $A$ .

Vi kan også ta union og snitt av flere enn to mengder. For eksempel er  $A \cup B \cup C$  mengden av alle objekter som er med i  $A$ ,  $B$  eller  $C$ . Videre er  $A \cap B \cap C$  mengden av alle objekter som er i *både*  $A$ ,  $B$  og  $C$ .

**EKSEMPEL 2** La  $A = \{1, 3, 5, 7\}$  og  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ . Da er  $A \cap B = \{1, 3\}$ ,  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ ,  $B \setminus A = \{2, 4\}$  og  $A \setminus B = \{5, 7\}$ . ■

## 1.2 OPPGAVER

**1.** La  $A = \{3, 4, 5\}$  og  $B = \{3, 5\}$ . Hvilke utsagn er sanne?

- |                            |                    |                      |
|----------------------------|--------------------|----------------------|
| a) $3 \in B$               | b) $4, 5 \in A$    | c) $2 \in A$         |
| d) $B \subseteq A$         | e) $A \subseteq B$ | f) $7 \notin A$      |
| g) $\emptyset \subseteq A$ | h) $A \subseteq A$ | i) $\emptyset \in A$ |

**2.** La  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Skriv mengdene på listeform:

- |                             |                                                     |
|-----------------------------|-----------------------------------------------------|
| a) $\{x + 7 \mid x \in M\}$ | b) $\{x \in M \mid x \neq 2 \text{ og } x \neq 5\}$ |
|-----------------------------|-----------------------------------------------------|

**3.** La  $R = \{1, 3, 5, 7\}$  og  $S = \{3, 5, 7, 9\}$ .

Finn  $R \cap S$ ,  $R \cup S$ ,  $R \setminus S$  og  $S \setminus R$ .

## 1.3 Det reelle tallsystemet

Med et **reelt tall** menes et desimaltall. Også desimaltall med uendelig mange desimaler regnes som reelle tall. Et eksempel på et reelt tall er altså

$$-237.200622222\dots$$

På den annen side kan godt alle desimalene til tallet være 0. Hele tall godtas altså også som reelle tall. Siden noen reelle tall har uendelig mange desimaler, er det like greit å si at «offisielt» har *alle* reelle tall uendelig mange desimaler. Men hvis alle desimalene er 0 fra et visst punkt av, kan man selvsagt droppe å skrive dem. For eksempel

$$23.7890000\dots = 23.789$$

Et reelt tall er altså et objekt bestående av følgende: Først et eventuelt minustegn, så et endelig antall sifre foran komma, så et komma (desimalpunkt), og så en uendelig rekke desimaler (som kan være 0) etter komma (desimalpunktet).

Reelle tall som inneholder en uendelig rekke repeterende 9-ere, betraktes som like med de tallene man får ved å «avrunde oppover», for eksempel

$$13.5499999\dots = 13.55$$

Reelle tall som ikke har noe minustegn og som ikke er 0, kalles **positive** tall. Reelle tall som *har* minustegn og ikke er 0, kalles **negative**. Vi regner 0 som hverken positivt eller negativt. Mengden av alle reelle tall, som altså kort og godt er mengden av alle tall på tallinjen, skrives  $\mathbb{R}$ .

Reelle tall som har bare nuller bak komma, kalles **hele** tall. Mengden av alle hele tall betegnes  $\mathbb{Z}$ . Vi har

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Tallene 0, 1, 2, 3, ... kalles **naturlige**. Mengden av naturlige tall skrives  $\mathbb{N}$ . Altså

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Tallene 1, 3, 5, ... kalles **oddetall**, mens 2, 4, 6, ... kalles **partall** eller *jevne* tall. Med **absoluttverdien** til et reelt tall  $a$  menes  $a$  med ev. minustegn foran fjernet. Eksempler:  $|-2| = 2$ ,  $|17| = 17$ .

La nå  $a$  og  $b$  være to ulike, positive reelle tall. Vi sier at  $a$  er **større enn**  $b$  hvis  $a$  har et større siffer enn  $b$  på den første plassen (fra venstre) der de to er ulike. Alle positive tall regnes som større enn negative. Hvis  $a$  og  $b$  begge er negative, sier vi at  $a$  er større enn  $b$  hvis  $|b|$  er større enn  $|a|$ . At  $a$  er **mindre enn**  $b$ , betyr per definisjon at  $b$  er større enn  $a$ . Notasjon:

$$\begin{aligned} a > b &\text{ betyr at } a \text{ er større enn } b \\ a < b &\text{ betyr at } a \text{ er mindre enn } b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \geq b &\text{ betyr at } a > b \text{ eller } a = b \\ a \leq b &\text{ betyr at } a < b \text{ eller } a = b \end{aligned}$$

Uttrykk der tegnene  $>$ ,  $\geq$ ,  $<$  eller  $\leq$  inngår, kalles **ulikheter**. Dersom kun  $>$  eller  $<$  inngår, kalles ulikheten *streng*.

## Intervaller

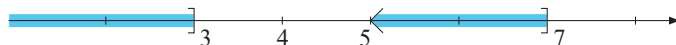
En delmengde  $U \subseteq \mathbb{R}$  kalles et **intervall** hvis den har følgende egenskap: Hvis  $s$  og  $t$  er to vilkårlige tall i  $U$ , så inneholder  $U$  også alle tall *mellom*  $s$  og  $t$ , dvs. alle tall  $x \in \mathbb{R}$  slik at  $s < x < t$ . Hvis  $a > b$ , bruker vi følgende notasjon for intervaller:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

Med andre ord: Vi bruker klammeparentes dersom endepunktene i et intervall er med i intervallet, og rund parentes ellers. Intervallene  $(a, b]$  og  $(a, b)$  defineres tilsvarende. Vi kan også ha intervaller som går fra et gitt tall  $a$  og opp til «uendelig», eller fra «minus uendelig» og opp til  $a$ . Notasjon:

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} \quad (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

Intervallene  $(a, \infty)$  og  $(-\infty, a]$  defineres tilsvarende. Symbolene « $\infty$ » og « $-\infty$ » står for «uendelig» og «minus uendelig». På figur 1.3.1 er intervallene  $(-\infty, 3]$  og  $(5, 7]$  illustrert.



**Figur 1.3.1** Intervallene  $(-\infty, 3]$  og  $(5, 7]$  på tallinjen

## Begrensninger

La  $U$  være en delmengde av  $\mathbb{R}$ . Med en **øvre begrensning** for  $U$  menes et reelt tall som er større enn eller lik alle tallene i  $U$ . Med en **nedre begrensning** for  $U$  menes et reelt tall som er mindre enn eller lik alle tallene i  $U$ .

**EKSEMPEL 1** La  $U = (-\infty, 4]$ . Da er både 5 og 4 øvre begrensninger for  $U$ , fordi alle tall  $x \in U$  oppfyller  $x \leq 5$  og  $x \leq 4$ . Derimot har  $U$  ingen nedre begrensning. ■

Hvis  $U$  har en øvre begrensning, kalles den **oppad begrenset**. Hvis  $U$  har en nedre begrensning, kalles den **nedad begrenset**. Hvis  $U$  er både oppad begrenset og nedad begrenset, kalles den **begrenset**.

## DEFINISJON 1

**Supremum og infimum**

La  $U$  være en delmengde av  $\mathbb{R}$ . Vi definerer

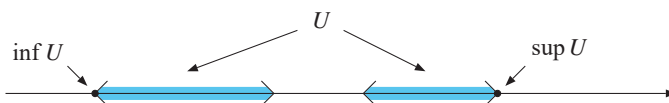
$\sup U \stackrel{\text{def}}{=} \text{minste øvre begrensning for } U \text{ (hvis en slik fins)}$

$\inf U \stackrel{\text{def}}{=} \text{største nedre begrensning for } U \text{ (hvis en slik fins)}$

Tallet  $\sup U$  kalles **supremum** til  $U$ , og  $\inf U$  kalles **infimum** til  $U$ .

Kort fortalt er  $\inf U$  punktet på tallinjen der  $U$  «begynner», og  $\sup U$  er punktet der  $U$  «slutter». Se figur 1.3.2.

**Figur 1.3.2** Supremum og infimum til en delmengde  $U$  av  $\mathbb{R}$



**EKSEMPEL 2** La  $U = (0, 2]$ . Da er både 2, 5 og  $\pi$  øvre begrensninger for  $U$ , men  $\sup U = 2$ . Videre er 0 og  $-1$  begge nedre begrensninger for  $U$ , men  $\inf U = 0$ . Merk at her er  $\inf U \notin U$ , mens  $\sup U \in U$ . ■

**Omegner, åpne mengder etc.**

La  $x$  være et reelt tall. En delmengde  $U \subseteq \mathbb{R}$  kalles en **omegn** om  $x$  hvis  $U$  inneholder et intervall av typen  $(t, T)$ , der  $t < x < T$ . For eksempel er  $U = [0, 1]$  en omegn om 0.8, for  $U$  inneholder intervallet  $(t, T) = (0.7, 0.9)$ . Se figur 1.3.3. Vi kunne også brukt  $(t, T) = (0, 1)$ .

**Figur 1.3.3** Intervallet  $[0, 1]$  er en omegn om punktet  $x = 0.8$

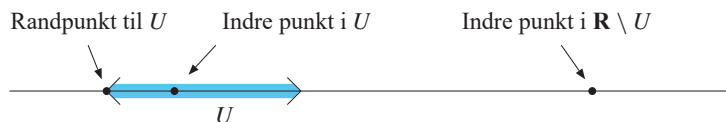


La  $U \subseteq \mathbb{R}$ . Et punkt  $x \in U$  kalles et **indre punkt** i  $U$  hvis  $U$  er en omegn om  $x$ . Mengden av indre punkter i  $U$  kalles **det indre** av  $U$ , og skrives  $U^*$ . Hvis

$$U = U^*$$

kalles  $U$  en **åpen** mengde. Hvis komplementet  $\mathbb{R} \setminus U$  er åpent, kalles  $U$  **lukket**. Et punkt  $x \in \mathbb{R}$  kalles et **randpunkt** til  $U$  dersom  $x$  hverken ligger i det indre av  $U$  eller i det indre av  $\mathbb{R} \setminus U$ . Mengden av randpunkter til  $U$  skrives  $\partial U$ , og kalles **randen** til  $U$ . Se figur 1.3.4.

**Figur 1.3.4** Randpunkter og indre punkter til delmengder av  $\mathbb{R}$



**EKSEMPEL 3** Intervaller på formen  $(a, b)$ ,  $(a, \infty)$  og  $(-\infty, a)$  er åpne mengder. For *ethvert* punkt  $x$  i disse intervallene kan du nemlig finne et lite intervall  $(t, T)$  rundt  $x$  som også ligger innenfor. Se figuren øverst på siden. Intervaller på formen  $[a, b]$  er *lukkede* mengder. I dette tilfellet er nemlig komplementet  $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$  en åpen mengde. ■

Et punkt  $x \in U$  kalles **isolert** i  $U$  hvis det fins en omegn om  $x$  som ikke innholder andre punkter fra  $U$  enn  $x$  selv. Et punkt  $x \in \mathbb{R}$  kalles et **oppbopningspunkt** for  $U$  hvis alle omegner om  $x$  inneholder uendelig mange punkter fra  $U$ . Oppgavene under illustrerer disse begrepene.

### 1.3 OPPGAVER

1. Skriv følgende mengder som intervaller:

- a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$       b)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 10\}$

2. La  $U = [3, 7) \cup (9, 12)$ . Vis at  $U$  er begrenset, og finn  $\inf U$  og  $\sup U$ .

3. La  $U$  og  $V$  være begrensede delmengder av  $\mathbb{R}$ . Vis at  $\sup(U \cap V) \leq \sup U$  og  $\sup(U \cap V) \leq \sup V$ .

4. La  $U = [0, 9) \cup (10, 12)$ .

a) Tegn  $U$  på tallinjen. Er  $U$  en omegn om tallet 2? Begrunn svaret. Er  $U$  en omegn om 10?

b) Finn  $U^*$ ,  $\mathbb{R} \setminus U$  og  $\partial U$ . Er  $U$  en åpen mengde? Er den lukket?

5. Gi et eksempel på en mengde  $U \subseteq \mathbb{R}$  og et punkt  $x \in \mathbb{R}$  slik at  $x$  er et oppbopningspunkt for  $U$ , og  $x \notin U$ . Gi også et eksempel på en mengde som har et isolert punkt.

## 1.4 Regning med reelle tall

Vi har to grunnleggende regneoperasjoner definert på mengden  $\mathbb{R}$  av reelle tall, nemlig **addisjon** og **multiplikasjon**. Hvis  $a, b \in \mathbb{R}$ , kan vi regne ut

$$a + b \quad \text{og} \quad a \cdot b$$

Istedenfor  $a \cdot b$  skriver vi ofte bare  $ab$ , bortsett fra når  $a$  og  $b$  begge er konkrete tall. Som kjent er  $2 \cdot 3 \neq 23$ .

Definisjonen av de to regneoperasjonene ovenfor og de 11 grunnleggende egenskapene for tallsystemet  $\mathbb{R}$  som er listet på neste side, tar vi for gitt her i boken. I formell teori tas vanligvis disse 11 egenskapene som **aksiomer**, altså *grunnleggende antakelser*, for det reelle tallsystemet. Teorien starter med disse

antakelsene. Det viser seg nemlig at man på grunnlag av disse 11 aksiomene kan utlede alle relevante egenskaper ved reelle tall, som for eksempel at reelle tall på naturlig måte kan skrives som desimaltall.

### Egenskaper ved det reelle tallsystemet

Følgende regler gjelder for tallsystemet  $\mathbb{R}$  av reelle tall:

- (1) For alle  $a, b \in \mathbb{R}$  er  $a + b = b + a$  og  $ab = ba$ .
- (2) For alle  $a, b, c \in \mathbb{R}$  er  $a + (b + c) = (a + b) + c$  og  $a(bc) = (ab)c$ .
- (3) For alle  $a, b, c \in \mathbb{R}$  er  $a(b + c) = ab + ac$ .
- (4) Der fins to elementer 0 og 1 i mengden  $\mathbb{R}$  slik at  $a + 0 = a$  og  $a \cdot 1 = a$  for alle  $a \in \mathbb{R}$ .
- (5) For ethvert tall  $a \in \mathbb{R}$  fins det et tall  $b \in \mathbb{R}$  slik at  $a + b = 0$ .
- (6) For ethvert tall  $a \in \mathbb{R}$  slik at  $a \neq 0$  fins det et tall  $b \in \mathbb{R}$  slik at  $ab = 1$ .
- (7) Hvis  $a, b$  og  $c$  er reelle tall slik at  $a < b$  og  $b < c$ , så er  $a < c$ .
- (8) Hvis  $a$  og  $b$  er reelle tall, så gjelder én av følgende tre muligheter: Enten er  $a < b$ , eller så er  $a = b$ , eller så er  $b < a$ .
- (9) Hvis  $a$  og  $b$  er reelle tall slik at  $a < b$ , så er  $a + c < b + c$  for alle reelle tall  $c$ .
- (10) Hvis  $a$  og  $b$  er reelle tall slik at  $a < b$ , så er  $ac < bc$  for alle reelle tall  $c > 0$ .
- (11) (Kompletthetsprinsippet) Hvis  $U$  er en ikke-tom, oppad begrenset delmengde av  $\mathbb{R}$ , så eksisterer  $\sup U$ .

Regel 11, altså kompletthetsprinsippet, sier at den reelle tallinjen er «komplett», uten «hull». Hvis du har en oppad begrenset, ikke-tom delmengde  $U$  av  $\mathbb{R}$ , så er det intuitivt rimelig at  $U$  må slutte et sted når vi beveger oss oppover tallinjen. Sluttpunktet blir  $\sup U$ . Kompletthetsprinsippet garanterer oss at det faktisk ligger et tall på den reelle tallinjen som markerer slutten på mengden  $U$ , altså at tallinjen ikke har noe hull akkurat der dette skulle ligget.

Faktum er at kompletthetsprinsippet er en svært viktig egenskap ved den reelle tallmengden; det er blant annet den eneste sentrale egenskapen som skiller denne tallmengden fra mengden av *rasjonale* tall (se seksjon 1.6).

Hvis  $U \subseteq \mathbb{R}$  er nedad begrenset, så vil «speilbildet»

$$V = \{-x \mid x \in U\}$$

av  $U$  om origo være oppad begrenset. Altså finnes  $\sup V$  ved kompletthetsprinsippet. Men da er  $-\sup V$  minste nedre begrensning for  $U$ , altså  $\inf U$ . Dette gir oss følgende:

## TEOREM 1

**Eksistens av infimum**

Hvis  $U$  er en ikke-tom, nedad begrenset delmengde av  $\mathbb{R}$ , så eksisterer  $\inf U$ .

For å gi deg et glimt av hvordan den aksiomatiske teorien for reelle tall arter seg, skal vi nå bevise et lite teorem som kan inngå i starten av oppbygningen.

## TEOREM 2

**Forkortningsloven for addisjon**

Hvis  $a, b, c$  er reelle tall slik at  $a + c = b + c$ , så er  $a = b$ .

**BEVIS** Anta at  $a + c = b + c$ . Ved egenskap (5) fins det et tall  $d$  slik at  $c + d = 0$ . Da får vi

$$(a + c) + d = (b + c) + d$$

Ved egenskap (2) kan vi skrive dette  $a + (c + d) = b + (c + d)$ . Siden  $c + d = 0$ , følger at  $a + 0 = b + 0$ . Ved egenskap (4) er imidlertid  $a + 0 = a$  og  $b + 0 = b$ , så vi får  $a = b$ . ■

Beviset ovenfor kan virke pedantisk. Men i mange sammenhenger er det en fordel å vise at vi *kan* utlede alle viktige egenskaper for reelle tall på denne måten — altså ved kun å bygge mekanisk på reglene i boksen side 8. For eksempel får vi bruk for det i kapittel 8.

I den aksiomatiske oppbygningen må også alle nye *definisjoner* tilbakeføres til de grunnleggende egenskapene i boksen. Eksempel:

- Ifølge egenskap (5) fins det til hvert tall  $a$  et unikt tall  $b$  slik at  $a + b = 0$ . Man kan vise (oppgave 1.4.14) at dette tallet  $b$  er *unikt*. Dermed kan vi *definere* det «motsatte» tallet  $-a$  til  $a$  ved å la  $-a$  være dette tallet  $b$ .

Dermed har vi  $a + (-a) = 0$ , som seg hør og bør. Tallet  $(-a)$  kalles ofte den *additive inversen* til  $a$ . På tilsvarende måte kan vi definere en *multiplikativ* invers til et tall  $a \neq 0$  ved å bruke egenskap (6):

- Ifølge egenskap (6) fins det til hvert tall  $a \neq 0$  et unikt tall  $b$  slik at  $ab = 1$ . Man kan vise (oppgave 1.4.15) at dette tallet  $b$  er *unikt*. Dermed kan vi *definere* tallet  $a^{-1}$  som dette tallet  $b$ .

Da har vi  $a \cdot a^{-1} = 1$ . Videre kan vi nå definere subtraksjon og divisjon av reelle tall ved å sette

$$a - b \stackrel{\text{def}}{=} a + (-b) \quad \text{og} \quad a/b \stackrel{\text{def}}{=} a \cdot b^{-1}$$

der vi i definisjonen av divisjon forutsetter  $b \neq 0$ . Istedenfor  $a : b$  skriver vi vanligvis  $a/b$  eller  $\frac{a}{b}$ , disse uttrykkene kalles **brøker**.

På grunn av egenskapene (3) og (4) i boksen trenger vi ikke skrive parenteser i regnestykker som består av flere addisjoner eller flere multiplikasjoner etter hverandre; om  $abc$  regnes ut som  $a(bc)$  eller  $(ab)c$ , spiller ingen rolle. Videre kan vi definere **potensuttrykk** ved å si at hvis  $a$  er et reelt tall og  $n \geq 1$  er et helt tall, setter vi

$$a^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ ganger}} \quad a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1 \quad a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}$$

der vi forutsetter  $a \neq 0$  i definisjonen til høyre. Uttrykket  $a^n$  kalles en **potens** med grunntall  $a$  og eksponent  $n$ . Uttrykket leses « $a$  opphøyd i  $n$ -te». Uttrykket  $a^2$  kalles ofte *kvadratet* av  $a$ , eller « $a$  kvadrert».

For å slippe å skrive så mye parenteser har man blitt enige om at operasjonen  $a^b$  «binder» sterkere enn  $ab$  og  $a/b$ , mens  $ab$  og  $a/b$  binder sterkere enn  $a + b$  og  $a - b$ . Så  $a + bc^n$  skal oppfattes som  $a + (b(c^n))$ . Dette gir reglene for «regnerekkefølge» man snakker om i skolen.

Etter å ha bevist noen flere småregler kan man komme frem til følgende teorem. Vi nummererer punktene i det slik at de fortsetter etter de 11 punktene i boksen side 8.

### TEOREM 3

#### Regneregler for reelle tall

Følgende regler gjelder for alle reelle tall  $a, b, c, d$  og hele tall  $n, m$ . Tall som det deles på, forutsettes å være forskjellige fra 0.

$$(12) \text{ (Minusregler)} \quad -(-a) = a \quad a(b - c) = ab - ac$$

$$(13) \text{ (Minusregler)} \quad a - (b + c) = a - b - c \quad a - (b - c) = a - b + c$$

$$(14) \text{ (Faktorregel)} \quad \text{Hvis } ab = 0, \text{ så er } a = 0 \text{ eller } b = 0$$

$$(15) \text{ (Trekantulikheten)} \quad |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$(16) \text{ (Eksponenter)} \quad a^n a^m = a^{n+m} \quad (a^n)^m = a^{nm} \quad (ab)^n = a^n b^n$$

$$(17) \text{ (Eksponenter)} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(18) \text{ (Brøker)} \quad \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

$$(19) \text{ (Brøker)} \quad \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd} \quad \frac{a}{c} \cdot b = \frac{ab}{c}$$

De aksiomatiske bevisene for disse reglene er tema for oppgavene 1.4.13–1.4.28 i slutten av seksjonen. Her i hovedteksten nøyer vi oss med å anbefale at du går gjennom reglene og prøver å overbevise deg om at de er riktige når  $a, b$  og  $c$  er hele tall. Velg da konkrete tall og sett inn.

Ut fra boksen side 8 kan man som nevnt utlede hele teorien for reelle tall. Blant annet må man da vise at hvert reelt tall kan representeres som et