Snorre Harald Christiansen

MATEMATISK FUNDAMENT

Spill i grenseland

Universitetsforlaget

Matematisk fundament

Matematisk fundament

Spill i grenseland



Snorre Harald Christiansen

Universitetsforlaget

© H. Aschehoug & Co (W. Nygaard) AS ved Universitetsforlaget, Oslo 2023
ISBN: 9788215069586
1. utgave, 1. versjon, Universitetsforlaget 2023
E-utgaven baserer seg på 1. trykte utgave, Universitetsforlaget 2023

Omslagsdesign: Ellen Lorenzen
Sats/design: Snorre Harald Christiansen

Materialet i denne publikasjonen er omfattet av åndsverklovens bestemmelser. Uten særskilt avtale med Universitetsforlaget er enhver eksemplarfremstilling og tilgjengeliggjøring bare tillatt i den utstrekning det er hjemlet i lov eller tillatt gjennom avtale med Kopinor, interesseorgan for rettighetshavere til åndsverk.

www.universitetsforlaget.no
post@universitetsforlaget.no

Til

Til de vitelystne,
de metodiske tvilerne
og de tvilsomme metodister.
Til de med tro på rasjonalitet,
håp om forståelse,
og en forkjærlighet for klarhet.
Til de som elsker faget,
både håndverket og kunsten.
Til de som begjærer det ukjente,
og andre nysgjerrigperer.



Festspill

Matematikkens fundament, slik det vil bli presentert i denne boken, er beinhardt stoff. Men jeg blir fort litt lyrisk når jeg tenker på det.

Hvilket spill, i hvilket grenseland, inviterer jeg til? Vi har som ambisjon å gripe fatt i matematikken ved dens røtter, der hvor den grenser mot det usigelige, det store intet. I dette grenselandet vokser det matematiske treet frem på mirakuløst vis. Premissene, de første utsagnene vi bygger på, kan virke både selvfølgelige og vilkårlige. Matematikken fremstår da som en lek, der vi står fritt til å velge regler, så lenge vi følger dem nøyaktig. Det er en uendelig kreativ prosess. De valgte spillereglene skiller seg ut som spesielt fruktbare, de leder inn i paradisiske hager. Denne vidunderlige verden er både tidløs og under konstant utvikling.

Matematikk er en fest, av og for mennesker. En fest for øyet, muligens, det som kan ane perfeksjon bak jordelige former. For øret, som er vart på språkets finurligheter. For hånden, som lar oss skrive ned og begripe de mest abstrakte tanker. For nesen, som er intuisjonens symbol i vår jakt på himmelske opplevelser. En fest for intelligensen, den som – følsomt – kan vise vei mot de klassiske idealene: det sanne, det vakre, det gode. En vandringsvei som kan gi tilfredsstillelse, mening og glede: som lar oss spekulere over tidløse gåter, utvikle sylskarpe verktøy, avdekke mønstre og andre rariteter, forstå store sammenhenger og helt enkelt *se*, både klart og langt.

Matematikk er et fyrtårn for vitenskapene og en vitenskap for de visjonære.

Innhold

Forspill **v**
Introduksjon xi
Kapitteloversikt xxiii
Arbeidsmetode xxv
Takk! xxix

1 Logikk **1**
1.1 Prolog 2
1.2 Utsagn 9
1.3 Egenskaper og relasjoner 18
1.4 Bevis 27
1.5 Eksempler på bevis 36
1.6 Oppgaver 49

2 Mengder **55**
2.1 Mengder definert ved en egenskap 57
2.2 Boolske og kartesiske operasjoner 63
2.3 Funksjoner 70
2.4 Injeksjon, surjeksjon, bijeksjon 79
2.5 Operasjoner på delmengder 85
2.6 Oppgaver 90

3 Tall **105**
3.1 Peanos aksiomer for de naturlige tall 106
3.2 Strukturer på de naturlige tallene 114
3.3 Hele tall 121
3.4 Tilbakeblikk på fundamentet 131
3.5 Oppgaver 137

4 Kardinalitet **147**
4.1 Endelige mengder 148
4.2 Uendelige mengder 157
4.3 Oppgaver 165

5 Relasjoner **171**
5.1 Ordensrelasjoner 173
5.2 Ekvivalensrelasjoner 180
5.3 Velordnede mengder 184
5.4 Oppgaver 193

6 Algebra **211**
6.1 Operasjoner 212
6.2 Monoider og grupper 218
6.3 Ringer og kropper 228
6.4 Summetegn 238
6.5 Ringkonstruksjoner 245
6.6 Oppgaver 253

7 Aritmetikk **261**
7.1 Største felles faktor 262
7.2 Primtall 266
7.3 Kongruensregning 269
7.4 Oppgaver 273

8 Analyse **281**
8.1 Reelle tall 282
8.2 Følger og deres grenser 288
8.3 Elementære reelle funksjoner 296
8.4 Komplekse tall 304
8.5 Potensrekker 307
8.6 Den komplekse eksponensial 312
8.7 Eksistens og entydighet 321
8.8 Oppgaver 323

Etterspill **331**

Hint og løsningsforslag til oppgavene **336**

Register **364**

Bibliografi **368**

There is geometry in the humming of the strings, there is music in the spacing of the spheres.

Pytagoras[1]

Philosophy is written in that great book which ever is before our eyes – I mean the universe – but we cannot understand it if we do not first learn the language and grasp the symbols in which it is written. This book is written in mathematical language, and the symbols are triangles, circles and other geometrical figures, without whose help it is impossible to comprehend a single word of it; without which one wanders in vain through a dark labyrinth.

Galileo Galilei[2]

I don't know what I may seem to the world, but as to myself, I seem to have been only like a boy playing on the sea-shore and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me.

Isaac Newton[3]

With mathematics we stand precisely at the point of intersection of restraint and freedom that makes up the essence of man itself.

Hermann Weyl[4]

[1]Sitert fra *The Mystery of Matter* (1965) red. Louise B. Young, s. 113.

[2]Fra *The Assayer* (1623), oversatt av Thomas Salusbury (1661), s. 178, sitert fra *The Metaphysical Foundations of Modern Science* (2003) av Edwin Arthur Burtt, s. 75.

[3]Sitert fra *Memoirs of the Life, Writings, and Discoveries of Sir Isaac Newton* (1855) av Sir David Brewster (Vol. II. Kap. 27).

[4]Med dette sitatet konkluderer Michael Harris kapittelet *"Why mathematics?", you might ask* i [16] s. 966.

Introduksjon – om matematikk

«Alt er tall.» Det pytagoreiske motto (fra ca. 500 f.Kr.) oppsummerte et verdensbilde som på mystisk vis forente aritmetikk med geometri, musikk og astronomi. Studiet av tall i seg selv og i relasjon til rom, tid og tidrom skulle lede de innvidde til en enhetlig forståelse av kosmos og mot kontemplasjon av de guddommelige harmonier. Lenge ble trening i disse fire kunstartene, som til sammen utgjorde quadrivium, ansett for å være den sikreste veien til innsikt om de klassiske idealene: det sanne, det vakre og det gode.

Ordet matematikk kommer fra *mathesis*, gresk for det å lære og deretter læren selv. Derifra er veien kort til tanken om at matematikk representerer en overordnet kunnskapsform, modell for en *mathesis universalis*, en universell vitenskap forespeilet spesielt av René Descartes (1596–1650) og Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Dette forblir nok en uoppnåelig drøm, men den gjenspeiler hvor altomfattende og dyptgripende det matematiske tankesettet kan være.

I matematikk enes vi om noen spilleregler som gjør oss i stand til å identifisere korrekte uttrykksformer og korrekt argumentasjon. Vi etterstreber klarhet i fremstillingene og god kommunikasjon. Slik sett bygger matematikk på grammatikk, logikk og en smule retorikk, de disiplinene som til sammen utgjorde trivium i den klassiske dannelsen, forløperen til quadrivium.

Med den logiske rammen på plass og noen stjerner å orientere oss etter kan vi ta fatt på hovedanliggendet i denne boken: å bygge det matematiske tempelet. Det er et møysommelig arbeid og vi skal bare legge en grunnmur. Men vi har, med andre ord, den store gleden av *å skape en ny begynnelse*. Mange matematikk-kurs representerer et sprang i forhold til de foregående og introduserer nye tenkemåter. Dette stoffet skiller seg ut ved å være konseptuelt helt selvforsynt.

I resten av denne oversikten skal jeg først si litt om moderne matematikk, om skjønnhetens tveeggede sverd og om det ofte paradoksale forholdet til andre vitenskaper. Deretter skal jeg gi noen historisk-filosofiske betraktninger rundt begrepet bevis og det å bygge opp en teori strengt logisk.

Matematikk i dag De første symbolene homo sapiens ser ut til å ha nedtegnet var tall, i form av hakk og streker, i bein og stein.[5] Å beherske og utvikle slike symbolske hjelpemidler, i stadig mer sofistikerte varianter, gir innsikt og makt. Denne utviklingen har akselerert, og i etterkrigstiden har datamaskinene åpnet for en eksplosiv vekst i verktøykassen.

Per i dag er det ingen som ville være i stand til å gi noe annet enn et overfladisk overblikk over den menneskelige matematiske produksjon. Man regner gjerne Henri Poincaré (1854–1912) og David Hilbert (1862–1943) som de siste universalister, produktive i de fleste grener av matematikken.

Matematiske kunster og teknikker har de senere årene hatt stor innflytelse på verdensutviklingen, militært, politisk, økonomisk og kulturelt. Man kan nevne RSA-kryptering (relevant for bank-transaksjoner), mp3-formatet (brukt for overføring av musikk) og PageRank (som dannet utgangspunktet for Googles søkemotor), som eksempler på informasjonsteknologier med en vesentlig matematisk komponent. Denne matematikken kan undervises på bachelornivå. De utgjør noen spesielt synlige topper på et isfjell av nyvinninger, i et hav av muligheter. Matematikk har lenge utgjort ryggraden i ingeniørkunsten. Helt siden pyramidenes tid har den inspirert mesterverk. Fremtidsvisjonen i filmen *2001: En romodyssé* (1968) er nesten realitet. Hvem vet hvor kunstig intelligens vil ta oss?

Matematiske konsepter og tenkemåter er grunnleggende for alle dagens vitenskaper. Matematiske verktøy er en vesentlig komponent i de fleste teknologier vi omgir oss med. Matematiske modeller er en viktig del av beslutningsgrunnlaget til økonomiske og politiske aktører. Matematikken er levende, i den forstand at den undervises, reflekteres over og videreutvikles, ikke bare ved universiteter. Matematikk gir makt. Matematikere griper stadig dypere inn i tilværelsen og dens gåter.

Skjønnhet Matematikeren Hermann Weyl (1885–1955) har uttalt, med glimt i øyet:

> My work always tried to unite the truth with the beautiful, but when I had to choose one or the other, I usually chose the beautiful.

Matematikk er skremmende effektivt. Det er en kampkunst i flere av ordets betydninger [6]: Det er sentralt i krigføring, men kan også være en

[5] Man har for eksempel funnet et ca. 30 000 år gammelt ulvebein med 55 hakk organisert i grupper på 5, med et ekstra markering etter 25. Se kapittel 1 i [30]. Se også Seksjon 1.6 *Matematikkens fremvekst og tallteoriens historie* i [22].

indre meditativ prosess. Leonard Cohen synger (i *First we take Manhattan*): «We're guided by the beauty of our weapons.» Hva består da matematikkens farlige skjønnhet i?

Matematisk skolerte guider vil kunne si mye om kjente turistmål. Flismønstrene i Alhambra illustrerer visstnok alle de 17 krystallografiske symmetrigruppene. At det gylne snitt opptrer så ofte både i kunst og natur, fra templer til solsikker, kan ses på som et søk etter den perfekte harmoni. Det ser ut til å være relatert til at det er det mest irrasjonale tallet – det som vanskeligst lar seg approksimere av brøker. Det er også nært beslektet med kontruksjonen av pentagonet med passer og linjal, et av høydepunktene i Euklids verk *Elementene* (ca. 300 f.Kr.). Pentagonet kan for øvrig ikke brukes til å flislegge en vegg periodisk, men derimot en sfære, der den gir opphav til dodekaedret, det mest mystiske av de platonske legemene. Kvasiperiodiske flismønstre, med pentagonal symmetri, har også blitt oppdaget, i matematikk og senere i naturen – muligens var de også kjent blant middelalderens arabiske kunstnere. Gitt alle disse forbindelsene er det kanskje ikke så rart at den amerikanske militærmaktens symbol, pentagonet, treffer.

For vitenskapspersoner som Johannes Kepler (1571–1630) og Paul Dirac (1902–1984), for bare å nevne disse to, var estetiske prinsipper og anelser av matematisk natur rettesnorer for utforskningen av universet. De førte til banebrytende naturvitenskapelige oppdagelser. Keplers lover for planetbanene ble senere prøvestein for Isaac Newtons (1643–1727) revolusjonerende teorier, og var gull verdt i hans arbeid med å utvikle dem. Dirac på sin side formodet eksistensen av en ny partikkel, positronet, på bakgrunn av likningen han formulerte. Fysiske eksperimenter skulle senere bekrefte intuisjonene hans. Newtons og Diracs likninger var oppfinnelser som førte til oppdagelser, og vice versa. Disse eksemplene antyder at det kan være fruktbart, til og med klokt, å søke det skjønne.

Det skal også sies at Kepler, i *Mysterium Cosmographicum*, først spekulerte i om det var noen forbindelse mellom det at det var 5 kjente planeter og 5 platonske legemer, spesielt om dette kunne forklare avstanden mellom planetbanene... Matematikk kan forføre og bortføre tanken, på godt og vondt. Newton selv, hvis bidrag representerer vannskiller i matematikk- og fysikkhistorien, og for mange begynnelsen på moderne matematisk naturvitenskap og teknologi, var også mystiker og alkymist. Ifølge økonomen John Maynard Keynes (1883–1946) var han den siste magiker.

Noen moderne fysikere tar forbehold mot idealet om matematisk skjønnhet [31]. Naturlovkonseptet er delvis avledet av den eldre idéen om gude-

gitte lover. Fortsatt vil mange forskere kunne uttrykke sin aktivitet som at de søker innsikt i Guds tanker. Selv er jeg mest opptatt av at vi skal snakke samme språk.

Et teorem er både et mirakel og en katastrofe [7]. Det tar oss forbi et vippepunkt. Banebrytende oppdagelser, hentet ved okkulte kilder, har sin pris. Prometeus ble som kjent hardt straffet av Zevs for å ha brakt gudenes ild til menneskene. Odin måtte gi Mime ett øye i pant for sin kunnskap.

Sannhet Matematikk har et spesielt forhold til begrepet sannhet. Sett utenifra er det kanskje matematikkens evne til å nå absolutte sannheter som er fascinerende.

Til sammenlikning har litteraturens kraft blitt analysert under titlene mathesis, mimesis, semiosis. Roland Barthes [4] la i dem litteraturens evne til å representere kunnskap, etterlikne livet og arbeide med språks symboliseringsmuligheter. Matematikk fremstår da som en særegen gren av det menneskelige kunnskapsprosjekt, med sitt eget korpus (flere tusen år gammelt og stadig større), sine egne kunster (vi teoriserer, praktiserer og skaper matematikk) og sine egne fremstillingsmåter (med uovertruffen symbolbruk).

I naturvitenskapene fremsetter man hypoteser og konfronterer prediksjoner med eksperimenter. For at en naturvitenskapelig teori skal være god, må den stemme med observasjonene. Vitenskapene har lenge inspirert utvikling av nye matematiske konsepter og metoder. Spesielt har gjensidig påvirkning med fysikk (tidligere kalt naturfilosofi) vært sterk. Matematikken blir ofte omtalt som vitenskapenes språk, da mye av kjernen i en gitt vitenskap uttrykkes ved hjelp av matematiske konsepter. At matematiske modeller kan brukes til å beskrive det vi kan observere, og forutsi naturfenomener med så høy presisjon, kan fremstå som litt av et mirakel.

Matematikk innebærer en spesiell måte å bruke språket. Et logisk fundament kreves for å diskutere matematikk. Utsagn kan behandles mekanisk eller formelt, uten hensyn til noe tenkt meningsinnehold. Matematikk kan også brukes til å analysere språk, enten formelle eller naturlige. Matematiske verktøy kan brukes i logikk. Matematisk logikk kan si interessante ting ikke bare om argumenter, men om matematikken som helhet. Denne grenen gir også et teoretisk fundament for informatikk, behandlingen av informasjon ved hjelp av datamaskin.

Geometri er en av de eldste grenene av matematikken. Etymologisk kommer ordet fra sammenstillingen av de greske ordene *ge* (jord) og *metria*

(måling), og tidlig geometri var beskjeftiget med landoppmåling. For eksempel var det, i det gamle Egypt, etter at Nilen hadde gått over sine bredder, viktig å kunne gjenopprette tomtegrenser. Men jeg tror at en indre geometrisk sans og undring også spilte en rolle. Når plangeometrien først ble kodifisert i det gamle Hellas, innebar det å abstrahere vekk referanser til den observerbare verden og å utvikle et språk for å beskrive og argumentere om idéer.

Også i moderne tid får matematikken bryne seg på omverdenen. I grenselaget er ikke spillereglene bare matematiske. Deler av språket kan være hentet utenifra, fra andre vitenskaper. Metodene og målsettingene likeså. Noen ganger kreves det ny matematikk for å gjøre fremskritt her, andre ganger kan det være nok å finne frem i den eksisterende. Siden 1950-tallet har vi hatt en eksplosiv fremvekst av en synergi mellom matematisk teori, kraften datamaskiner gir og problemstillinger fra det vi kaller, med en viss ømhet, den virkelige verden. Modellering og algoritmikk, som vitenskapelig metode, brer om seg. En matematisk teori rundt disse aktivitetene er under konstant utvikling. Dette fagfeltet har fått det litt misvisende navnet «anvendt matematikk». Nye anvendelsesområder inkluderer meteorologi, industriell design, bildebehandling, finans, helse, klima og mange flere.

I tråd med den generelle tendensen til større spesialisering, og noen ganger for å distansere seg fra det militærindustrielle komplekset, velger noen matematikere å konsentrere seg utelukkende om interne problemstillinger. Dette er kunst for kunstens skyld, på godt og vondt. Den tar oss mot et av den menneskelige erkjennelses ytterpunkter. Med en viss prektighet kalles denne aktiviteten «ren matematikk». For eksempel kan store deler av tallteorien sies å være ren. Men kryptologene (kodeknekkerne) følger nøye med! Uttrykkene «ren» og «anvendt» er upresise og litt kontroversielle. Storheter som Newton, Euler, Gauss og Poincaré opererte på begge sider av skillet. De hadde begge beina godt plantet i matematikken – men de hadde også en fot i omverdenen! I dag har vi et økosystem av matematiske fag som utvikler seg på uforutsigbare måter, med nye broer seg imellom, nye bånd til omverdenen og stadig dypere teori.

Selv om jeg tar innover meg sider ved samspillet med de andre vitenskapene, er hovedtanken, i denne boken, å fremstille matematikk som en autonom og særegen kunnskapsgren.

Det er vanskelig å definere matematikk sett utenifra. Fagfeltet er paradoksalt: Siden det er ren tanke, og dermed intimt knyttet til observatøren, hvordan kan det påberope seg perfekt objektivitet? Boken er skrevet ut ifra en følelse av at det matematiske språket ikke bare er et formelt

spill, med til dels vilkårlige regler og objekter. Jeg påstår at det uttrykker noe essensielt og vesentlig, på menneskelige premisser. Matematisk tekst oppstår gjerne som en tenkt dialog med en leser. Stringensen i språket fungerer som fundament for en nærmest perfekt verden, hvor definisjonsmakten er uendelig. At rammen er så presis, men mulighetene så mange, gjør at kreativiteten får bryne seg på utallige fruktbare problemstillinger. Matematikk er en tenkemåte. Ikke alle sanne matematiske utsagn er like interessante, så her er det også mulighet for å utvikle personlig stil, for ikke å si smak. Men akkurat hva handler det om? Godt spørsmål! Jeg har ikke noe bedre svar enn å vise til innholdet i denne boken for noen utfyllende eksempler.

Bevis og matematiske byggverk Det som karakteriserer matematikeres omgang med påstander, er at sannheten etableres ved hjelp av bevis. Selv om alle fagfelt har sin argumentasjon, står den matematiske varianten i en særstilling.

Matematikere enes på forhånd om hva som er grunnleggende sannheter og hva som utgjør gyldig argumentasjon. Vi er ikke i stand til å definere alle matematiske objekter. Noen vil for eksempel si at naturlige tall er et slags urkonsept, som ikke lar seg definere ved hjelp av enklere konsepter. Men vi kan enes om noen grunnleggende egenskaper ved de naturlige tallene, som vi kaller for aksiomer. For eksempel kan man bruke Peanos aksiomer (1889) (vi formulerer dem i Aksiom 3.1.1). Deretter vil vi kunne utlede mer kompliserte påstander om de naturlige tallene, for eksempel at de har en unik primtallsfaktorisering (dit kommer vi i Teorem 7.2.4). Eventuelt kan vi spekulere over uløste problemstillinger. Det mest kjente er kanskje riemannhypotesen (1859). Det er et av Millenniumprisproblemene formulert av Clay Mathematics Institute.

Beviste påstander som fremstår som spesielt viktige, kalles teoremer. På vei fra aksiomene til teoremene introduseres gjerne nye matematiske objekter, ved hjelp av definisjoner. I Hilberts aksiomatisering av geometrien (1899) var for eksempel «punkter», «linjer» og «plan» urkonsepter. Det er uviktig hvilke navn man bruker for å betegne egenskaper ved objekter: prinsipielt skulle man kunne erstatte de tre ordene med «bord», «stol» og «øl-glass»,[6] så lenge man er enige om hvilke relasjoner som gjelder mellom dem og man er konsistent i ordbruken. Deretter, ut ifra disse urkonseptene, vil man for eksempel kunne definere hva en trekant er, og kunne bevise egenskaper ved trekanter, som at høydene møtes i et punkt.

[6] Dette er tittelen på et kapittel i [29].

Når man tenker aksiomatisk, forandres fokus fra hva matematiske objekter er i seg selv, til hva man kan gjøre med dem, hvordan de relaterer til hverandre. Det har blitt sagt om aksiomer at de er definisjoner i forkledning.

Et av de mest kjente teoremene i euklidsk geometri er det oppkalt etter Pytagoras. Pytagoras' teorem er en relasjon mellom arealene til tre kvadrater knyttet til sidene i en trekant med en rett vinkel. Denne påstanden er ikke opplagt, og sannhetsinneholdet kan fremstå som noe å studere, kontemplere og meditere over. Etymologien til ordet *teorem* tilsier også det.[7] For Pytagoras' disipler var ikke religion og vitenskap adskilt som i dag. Pytagoras' teorem var for øvrig tidligere kjent i Mesopotamia, India og Kina, med varierende grad av generalitet i formuleringen og stringens i argumentasjonen.

Hva vil det si å bevise Pytagoras' teorem? For Pytagoras besto nok argumentet essensielt i intuitivt opplagte betraktninger kring en figur, hvor det ikke er helt klart hva man tar for gitt, hva utgangspunktet er. Euklids verk *Elementene* inneholder to bevis for Pytagoras' teorem, ut ifra definisjoner og aksiomer. De færreste moderne matematikere ville ha noe å utsette på disse bevisene. Det er bemerkelsesverdig hvor godt byggverket har stått seg. Man kan likevel stusse over at den første setningen i *Elementene* er definisjonen «Et punkt er det som ikke har noen deler», og at den første proposisjonen faktisk ikke følger av aksiomene. Euklid var ikke klar over nødvendigheten av udefinerte konsepter. Som poengtert av Leibniz mangler det, for å bevise Proposisjon 1, et aksiom som garanterer at to sirkler som går igjennom hverandres sentre virkelig møtes, dvs. har felles punkter.[8]

Euklids verk var et fyrtårn for kulturen i millennier. Det har blitt kalt verdens mest fremgangsrike lærebok. Fra vårt synspunkt er det likevel et poeng at Hilbert ryddet opp i grunnlaget da han fremstilte en ny aksiomatisering av geometrien. Dette arbeidet kom i kjølvannet av oppdagelsen av ikke-euklidske geometrier (i perioden 1813–1832) og en dypere forståelse av parallellpostulatet.[9] Selv om plangeometri ikke lenger ses på som et sentralt tema i matematikken, skulle opprydningen få stor innflytelse på

[7] Fra gresk, *theorema* (forestilling, skue, det man betrakter), *theorein* (se på, spekulere), *theoria* (kontemplasjon, spekulasjon, betraktning), *thea* (syn, gudinne), *theos* (gud).

[8] Med de gitte aksiomene er det ikke noe i veien for at man kun ser på punkter i planet med rasjonale koordinater. Da vil ikke sirklene skjære hverandre. Argumenter som tolker aksiomsystemer i mer komplette aksiomsystemer ledet til tanken om *modeller* for gitte aksiomer.

[9] En variant er: Gitt en linje, og et punkt ikke på linjen, finnes det en unik linje som