Alt du trenger å vite om lineær algebra, kort og godt

LINEÆR ALGEBRA
Kort og godt

Rolf Nossum

UNIVERSITETSFORLAGET

Lineær algebra

Kort og godt

Kort og godt-serien er en serie med kompakte lærebøker som går rett på sak, er korte og konsise, og som gjør det lett å finne frem til kjernen i stoffet. Bøkene er spesielt velegnet som repetisjonsbøker i forbindelse med eksamensforberedelser.

Til nå har følgende titler utkommet:

Christian Oxholm Zigler og Bitte Skaug Paulsen:
Markedsføringsledelse – Kort og godt

Morten Helbæk og Snorre Lindset:
Finansiering og investering – Kort og godt

Morten Helbæk:
Statistikk – Kort og godt

Brit Rohnes:
Matematikk for økonomer – Kort og godt

Morten Helbæk:
Operasjonsanalyse – Kort og godt

Rolf Nossum:
Lineær algebra – Kort og godt

Rolf Nossum

Lineær algebra
Kort og godt

Universitetsforlaget

© Universitetsforlaget, Oslo, 2021
ISBN: 9788215054377
1. utgave, 1. versjon, Universitetsforlaget, 2021
E-utgaven baserer seg på 1. trykte utgave, Universitetsforlaget 2010

Elektronisk tilrettelegging: Universitetsforlaget
Omslagsdesign: Atle Lillehovde/Universitetsforlaget
Sats/design: Arve Michaelsen/Matematisk Sats

Materialet i denne publikasjonen er omfattet av åndsverklovens bestemmelser. Uten særskilt avtale med Universitetsforlaget er enhver eksemplarfremstilling og tilgjengeliggjøring bare tillatt i den utstrekning det er hjemlet i lov eller tillatt gjennom avtale med Kopinor, interesseorgan for rettighetshavere til åndsverk.

www.universitetsforlaget.no
post@universitetsforlaget.no

Forord

Denne boken gir en konsis fremstilling av de sentrale temaene i lineær algebra og vil dekke pensum i de fleste kurs om lineær algebra som undervises ved norske universiteter og høyskoler. Den vil også egne seg som oppslagsbok for dem som ønsker en repetisjon av ett eller flere temaer i lineær algebra.

Det er øvelsesoppgaver i slutten av hvert kapittel, med løsningsforslag på forlagets nettsider www.universitetsforlaget.no/nossum. Noen av øvelsene er hentet fra gamle eksamensoppgaver. Deler av boken har en fortid som lærestoff for undervisningen i lineær algebra ved Universitetet i Agder, og jeg vil benytte anledningen til å takke de mange dyktige studentene jeg har truffet der i årenes løp.

Hvis du liker boken, så fortell det til alle vennene dine! Hvis ikke, så fortell det til meg. Uansett vil jeg sette stor pris på å høre om forslag til forbedringer, og om eventuelle feil som måtte forekomme.

Trivelig lesning!

Kristiansand, desember 2009

Rolf Nossum

Innhold

Forord **5**

1 Introduksjon **9**

2 Lineære ligninger **11**
2.1 Gauss-Jordan-eliminasjon 11
2.2 Koeffisientmatrisen 14
2.3 Trappeform, løsbarhet 16
Oppgaver til kapittel 2 22

3 Linjer, plan og rom **25**
3.1 Koordinatsystemer 25
3.2 Prikkproduktet 29
3.3 Normer, ortogonalitet og projeksjon 30
3.4 Parametrisk representasjon 33
3.5 Kryssproduktet 36
Oppgaver til kapittel 3 37

4 Grupper og kropper **41**
4.1 Grupper 41
4.2 Kropper 55
Oppgaver til kapittel 4 60

5 Den komplekse tallkroppen **63**
5.1 Kvadratrøtter av negative tall 63
5.2 Kompleks aritmetikk 64
5.3 Det komplekse plan 66
5.4 Komplekse n-te røtter av 1 72
Oppgaver til kapittel 5 74

6 Polynomer **77**
6.1 Utvidelse av en kropp med et fritt symbol 77
6.2 Faktorisering og divisjon 79
6.3 Løsning i radikaler 83
6.4 Algebraens fundamentalsetning 89
Oppgaver til kapittel 6 90

7 Vektorrom **93**
7.1 Lineær uavhengighet 96
7.2 Basis 97
7.3 Indreprodukt 101
7.4 Ortogonalitet 104
7.5 Direkte summer og produkter 107
7.6 Funksjonsrom 110
Oppgaver til kapittel 7 115

8 Matrisealgebra **119**
8.1 Matriser 119
8.2 Elementære matriser 125
8.3 Matriseinvertering 128
8.4 Determinanter og inverterbarhet 131
8.5 Cramers regel 138
Oppgaver til kapittel 8 139

9 Lineære avbildninger **145**
9.1 Bilde og kjerne 147
9.2 Rang og nullitet 151
9.3 Skifte av basis 153
9.4 Matriserepresentasjon 157
Oppgaver til kapittel 9 161

10 Egenverdier og egenvektorer **165**
10.1 Karakteristisk polynom 166
10.2 Dynamiske systemer 171
10.3 Diagonalisering 175
10.4 Spektralteoremet 179
10.5 Kvadratiske former 184
Oppgaver til kapittel 10 192

A Tilleggsmateriale **197**
A.1 Bevis for at $\mathbb{C}$ er en kropp 197
A.2 Bevis for at alle vektorrom har en basis 198
A.3 Forkunnskaper 199

B Videre lesning **203**

Stikkord **205**

kapittel 1

Introduksjon

Lineær algebra er den grenen av matematikken som handler om lineære ligningssystemer, matriser, vektorer, vektorrom og lineære avbildninger. Metodene fra den lineære algebraen har mange anvendelser i naturfag, ingeniørfag, økonomi og samfunnsfag, så vel som i høyere matematikk.

Effektiv løsning av lineære ligningssystemer er nyttig i mange sammenhenger, og matrisenotasjon er et bekvemt format for dette. Gauss-Jordan-prosessen leder til løsningen hvis den finnes, avslører eventuelt uløsbarhet, og viser strukturen i løsningsmengden hvis et ligningssystem har flere enn en løsning.

Studiet av vektorer har sitt utspring i geometrien, med linjer, plan og rom slik vi kjenner dem fra hverdagen. Begreper som lengde og retning har en umiddelbar intuitiv forankring her. Mange av egenskapene til 1-, 2- og 3-dimensjonale rom generaliserer direkte til n-dimensjonale rom for vilkårlig $n \in \mathbb{N}$. Der har vi ikke lenger geometriske intuisjoner å støtte oss på, men metodene fra lineær algebra kan likevel anvendes.

En viktig del av enhver algebraisk teori er det underliggende tallsystemet der de konkrete beregningene foregår. I matematikken skilles det mellom ulike tallsystemer eller, som det heter blant matematikere, kropper. De vanligste kroppene er rasjonale tall $\mathbb{Q}$, reelle tall $\mathbb{R}$, komplekse tall $\mathbb{C}$, og de endelige kroppene $\mathbb{Z}_p$ av restklasser modulo et primtall p, men det finnes mange andre i tillegg.

Et hovedtema i algebraen er løsbarhet av polynomligninger, som for eksempel $x^2 - 3x + 2 = 0$. Ikke alle slike ligninger kan løses i enhver kropp, for eksempel har ligningen $x^2 + 1 = 0$ ingen løsning i kroppen $\mathbb{R}$. Det viser seg at alle polynomligninger har en løsning innenfor den komplekse tallkroppen $\mathbb{C}$, og dette resultatet kalles algebraens fundamentalsetning. Et enkelt bevis for den finnes i kapittel 6.

Lineære avbildninger mellom vektorrom står sentralt i lineær algebra. Noen lineære avbildninger er invariante på enkelte delrom, og denne egenskapen har svært nyttige anvendelser, blant annet i studiet av dynamiske systemer. Slike delrom spennes ut av egenvektorer. Noen lineære avbildninger kan uttrykkes fullstendig ved hjelp av ortogonale egenvektorer, og spektralteoremet forteller hvilke avbildninger som har denne egenskapen.

Her er en oversikt over bokens kapitler og de temaene som behandles i hvert av dem: I kapittel 2 behandles Gauss-Jordan-eliminasjon på lineære ligningssystemer. Elementære radoperasjoner på koeffisientmatrisen leder til trappeform, og løsbarheten av systemet drøftes ut fra trappeformen. Parametriserte løsninger angis der det er flere enn en løsning.

Kapittel 3 omhandler de kartesiske rommene $\mathbb{R}^n$, med koordinatisering, skalar- og vektorprodukt, samt norm, ortogonalitet og projeksjon. Parametrisert representasjon av linjer og plan vises.

Kapittel 4 dreier seg om grupper og kropper. En gruppe er en mengde som er lukket under en assosiativ operasjon, som i regnestykket $3+5+(-4)+6$, der noen tall adderes, og resultatet også er et tall. Kropper konstrueres som par av grupper. Regneartene addisjon og multiplikasjon i en kropp behandles som to gruppeoperasjoner $+$ og $\cdot$ som er koblet sammen med distribusjonsregelen $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$. Subkropper og kroppsutvidelser innføres, med sikte på anvendelser i de to neste kapitlene.

I kapittel 5 vises konstruksjonen av de komplekse tallene som en kroppsutvidelse av $\mathbb{R}$ med et nytt symbol i som har egenskapen $i^2 + 1 = 0$. Beviset for at dette resulterer i en kropp er tatt med i et vedlegg. Kartesisk, trigonometrisk og eksponentiell notasjon for komplekse tall behandles, og det vises at n-tegradsrøttene av 1 danner en gruppe under kompleks multiplikasjon.

I kapittel 6 konstrueres polynomer over en kropp K som en utvidelse av K med et fritt symbol x. Delbarhet og faktorisering av polynomer over ulike kropper behandles. Algebraens fundamentalsetning bevises ved hjelp av Cauchys integralformel. Løsbarhet i radikaler av ligninger med grad opp til 4 behandles, og årsakene til uløsbarhet i radikaler av femtegradsligningen omtales.

Kapittel 7 behandler vektorrom. Lineær uavhengighet og basiser defineres. Beviset for at alle ikke-trivielle vektorrom har en basis, er tatt med i et vedlegg. Trekantulikheten og Cauchy-Schwarz' ulikhet bevises. Komplekse indreprodukter defineres med tilhørende norm- og ortogonalitetsbegrep. Gram-Schmidt-prosessen beskrives med korrekthetsbevis. Direkte produkter og summer innføres. Funksjonsrom med indreprodukt studeres, med anvendelse på minste kvadraters metode.

I kapittel 8 behandles matriser inngående. Ekvivalensen mellom elementære radoperasjoner og multiplikasjon med elementære matriser etableres, og korrekthet av Gauss-Jordan-prosessen bevises. Determinanter innføres, og Cramers regel bevises.

I kapittel 9 studeres lineære avbildninger mellom vektorrom. Rang-nullitetssetningen bevises. Matriser for koordinatskifte innføres, og matriserepresentasjonen av en lineær avbildning med hensyn til en basis studeres.

I kapittel 10 ser vi på egenskapene til lineære operatorer, det vil si lineære avbildninger av et vektorrom på seg selv. Egenverdier defineres som røtter i det karakteristiske polynom, og tilsvarende egenvektorer finnes. Dette anvendes på dynamiske systemer. Diagonalisering av operatorer innføres, og spektralteoremet for reelle og komplekse operatorer bevises. Til slutt studeres kvadratiske former med anvendelser på kjeglesnitt.

kapittel 2

Lineære ligninger

I dette kapitlet studerer vi løsningsteknikker for systemer av n lineære ligninger i n ukjente:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&(2) \quad a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&(n) \quad a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Her står n for hvilket som helst naturlig tall, og x_i, $1 \leq i \leq n$, er ukjente, som vi skal bestemme verdiene til. Videre står a_{ij} og b_i, der $1 \leq i, j \leq n$, for reelle tall, og tallene a_{ij} kalles systemets *koeffisienter*.

Det spiller ingen særlig rolle hva vi kaller de ukjente, så lenge vi kan skille dem fra hverandre. For små n er det vanlig å kalle de ukjente x, y, z o.l. i stedet for x_1, x_2, x_3 osv.

2.1 Gauss-Jordan-eliminasjon

La oss begynne med et lite eksempel og løse det på en måte som du nok har sett mange ganger før:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad 3x - 2y = -1 \\
&(2) \quad -7x + 5y = \quad 4
\end{aligned}$$

Multipliser ligning (2) med 3 og legg 7 ganger ligning (1) til ligning (2):

$$y = 5$$

Nå setter vi $y = 5$ i ligning (1) og løser ligning (1) for x:

$$x = 3$$

I det første steget konstruerte vi en passende kombinasjon av de to ligningene på en slik måte at koeffisienten for x skulle bli 0, og dermed eliminerte vi x og fikk en løsning for y. I det andre steget satte vi løsningen for y tilbake i den første ligningen, og løste den for x.

Her er et annet fullstendig løst eksempel, der $n = 3$:

$$\begin{aligned} &(1) \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ &(2) \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ &(3) \quad 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Multipliser ligning (2) med 3 og subtraher 2 ganger ligning (1) fra ligning (2), og multipliser ligning (3) med 3 og subtraher 4 ganger ligning (1) fra ligning (3):

$$\begin{aligned} &(1) \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 = \quad 4 \\ &(2) \qquad\quad 5x_2 + x_3 = \ 10 \\ &(3) \qquad -2x_2 - x_3 = -7 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Multipliser nå ligning (3) med 5 og adder 2 ganger ligning (2) til ligning (3):

$$\begin{aligned} &(1) \quad 3x_1 + 2x_2 + \ x_3 = \quad 4 \\ &(2) \qquad\quad 5x_2 + \ x_3 = \ 10 \\ &(3) \qquad\qquad -3x_3 = -15 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Løs ligning (3) for x_3 og eliminer x_3 fra ligningene (2) og (1):

$$\begin{aligned} &(1) \quad 3x_1 + 2x_2 \qquad = -1 \\ &(2) \qquad\quad 5x_2 \qquad = \ 5 \\ &(3) \qquad\qquad\quad x_3 = \ 5 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Løs ligning (2) for x_2 og eliminer x_2 fra ligning (1):

$$\begin{aligned} &(1) \quad 3x_1 \qquad\quad = -3 \\ &(2) \qquad\quad x_2 \qquad = \ 1 \\ &(3) \qquad\qquad\quad x_3 = \ 5 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Løs ligning (1) for x_1:

$$\begin{aligned} &(1) \quad x_1 \qquad\quad = -1 \\ &(2) \qquad\quad x_2 \qquad = \ 1 \\ &(3) \qquad\qquad\quad x_3 = \ 5 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dermed er ligningene løst. Prosedyren (2.2) $\rightarrow \cdots \rightarrow$ (2.7) kalles Gauss-Jordan-eliminasjon, til minne om Carl Friedrich Gauss og Wilhelm Jordan.

Denne teknikken generaliserer til systemer med n lineære ligninger med n ukjente $x_1, \ldots, x_n$, for enhver $n \in \mathbb{N}$, jf (2.1):

$$\begin{aligned}
&(1) \quad a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&(2) \quad a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&(n) \quad a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}$$

Som første steg elimineres x_1 fra ligningene $(2), \ldots, (n)$ slik: ligning (2) multipliseres med a_{12}, og $(-a_{21})$ ganger ligning (1) legges til ligning (2), så multipliseres ligning (3) med a_{12}, og $(-a_{31})$ ganger ligning (1) legges til ligning (3). Tilsvarende steg eliminerer x_1 fra ligningene $(4), \ldots, (n)$. Dette resulterer i nye koeffisienter a'_{ij} og b'_i for $2 \leq i, j \leq n$:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&(2) \quad 0 \quad + a'_{21}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&(n) \quad 0 \quad + a'_{n1}x_2 + \cdots + a'_{nn}x_n = b'_n
\end{aligned}$$

På analogt vis blir så x_2 eliminert fra ligningene $(3), \ldots, (n)$, x_3 elimineres fra ligningene $(4), \ldots, (n)$, osv, og til slutt er x_n den eneste variabelen som forekommer i ligning (n):

$$\begin{aligned}
&(1) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \cdots + a_{1\,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\
&(2) \quad 0 \quad + a'_{21}x_2 + \cdots + a'_{2\,n-1}x_{n-1} + a'_{2n}x_n = b'_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots

2.2 Koeffisientmatrisen

Det er ofte bekvemt å skrive (2.1) på denne måten:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

eller enda mer kompakt, slik:

$$Ax = b \tag{2.9}$$

med

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Tall-oppstillingen A kalles *koeffisientmatrisen*[1] til systemet (2.8).

På denne måten kan systemet (2.2) skrives mer kompakt i matrise-notasjon:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Det er hensiktsmessig å utføre Gauss-Jordan-eliminasjon på (2.10) ved å danne den *utvidede* matrisen eller *totalmatrisen*, som abstraherer vekk navnene på de ukjente. Den utvidede matrisen består av koeffisientmatrisen med en ekstra kolonne som inneholder ligningenes høyresider:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

Formulert ved hjelp av den utvidede matrisen ser beregningen (2.2) $\to \cdots \to$ (2.7) slik ut:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

[1] I dette kapitlet skal vi bruke matriser som et notasjonsmessig hjelpemiddel som gir et greit format for å beskrive Gauss-Jordan-prosessen. I kapittel 8 skal vi studere matriser grundigere.

De manipulasjonene vi har gjort for å løse disse ligningssystemene kan uttrykkes som en sekvens av grunnleggende operasjoner, der hver enkelt operasjon angår en enkelt rad av den utvidede matrisen. Disse operasjonene kalles *elementære radoperasjoner*, og det viser seg at de følgende tre typene strekker til i alle tilfeller:

Definisjon 2.1 (Elementære radoperasjoner)

Bytt: Bytt om to rader.

Skaler: Multipliser en rad med et tall som ikke er null.

Kombiner: Adder et multippel av en rad til en annen rad.

Vi kan gjøre Gauss-Jordan-eliminasjon på (2.8) ved å danne den utvidede matrisen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

og utføre elementære radoperasjoner på den.

Når løsningen til det tilsvarende ligningssystemet er funnet, ser den utvidede matrisen slik ut:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & s_n \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

og løsningene

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

kan da avleses i kolonnen lengst til høyre.

La oss avrunde dette avsnittet ved å forsikre oss om at elementære radoperasjoner på en utvidet matrise bevarer løsningene til det tilsvarende ligningssystemet:

Teorem 2.2 (Korrekthet av elementære radoperasjoner) En elementær radoperasjon på en utvidet matrise endrer ikke løsningene til det tilsvarende ligningssystemet.

Bevis Vi gjør en elementær radoperasjon på den utvidede matrisen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

og beviser at det resulterende ligningssystemet er ekvivalent med det opprinnelige systemet. Beviset tar for seg de tre typene elementære radoperasjoner separat:

Bytt: Vi bytter om rad nummer (j) og (k). Ligningene det gjelder er

$$\begin{aligned} (j) \quad & a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ (k) \quad & a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \end{aligned}$$

Det er opplagt at det å skrive opp disse ligningene i motsatt innbyrdes rekkefølge ikke endrer på løsningene til ligningssystemet.

Skaler: Vi multipliserer rad (j) med et tall $c \neq 0$. Ligningene det gjelder er

$$(j) \quad a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j$$

og resultatet er

$$(j) \quad ca_{j1}x_1 + \cdots + ca_{jn}x_n = cb_j$$

som åpenbart er ekvivalent.

Kombiner: Vi adderer c ganger rad j til rad $k \neq j$. De ligningene det gjelder er

$$\begin{aligned} (j) \quad & a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ (k) \quad & a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \end{aligned}$$

og resultatet er

$$\begin{aligned} (j) \quad & a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ (k) \quad & (ca_{j1} + a_{k1})x_1 + \cdots + (ca_{jn} + a_{kn})x_n = cb_j + b_k \end{aligned}$$

Disse to ligningsparene er klart ekvivalente. ∎

2.3 Trappeform, løsbarhet

Så langt har vi sett hvordan Gauss-Jordan-eliminasjon løser ligningssystemer som har en entydig løsning. Men det finnes selvfølgelig ligningssett med mer enn én løsning, og det finnes ligningssett som ikke har noen løsninger i det hele tatt. Nå skal vi se hvordan disse spesialtilfellene viser seg under eliminasjonsprosessen.

Vi starter med et eksempel på et system som ikke har noen løsning:

Eksempel 2.3 (Ingen løsning)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$ subtraher 2 ganger rad 1 fra rad 2 og adder 3 ganger rad 1 til rad 3

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$ adder rad 2 til rad 3

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$ herfra er det ingen vei videre

Problemet blir tydelig hvis vi skriver ut den siste raden i den utvidede matrisen som en ligning:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -2$$

Det er ingen verdier av de ukjente som kan tilfredsstille denne ligningen.

Det første elementet som ikke er null i hver rad, kalles den *ledende koeffisienten* i vedkommende rad. En ledende koeffisient i kolonnen lengst til høyre signaliserer et uløsbart ligningssystem.

Nå tar vi for oss et ligningssystem som har mange løsninger:

Eksempel 2.4 (Mange løsninger)

$$\begin{pmatrix} 3 & 16 & 50 & 33 \\ 5 & 28 & 86 & 59 \\ 7 & 38 & 118 & 79 \end{pmatrix}$$ multipliser rad 2 med 3 og subtraher 5 ganger rad 1 fra den multipliser rad 3 med 3 og subtraher 7 ganger rad 1 fra den

$$\begin{pmatrix} 3 & 16 & 50 & 33 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$ multipliser rad 3 med 4 og subtraher 2 ganger rad 2 fra den

$$\begin{pmatrix} 3 & 16 & 50 & 33 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ingen ledende koeffisient i rad 3

Den siste raden i den utvidede matrisen representerer denne ligningen:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

Det er klart at hvilke som helst verdier av de ukjente tilfredsstiller denne ligningen.

En rad uten ledende koeffisient signaliserer at ligningssystemet har mange løsninger. Vi kan avdekke strukturen til løsningssettet på denne måten: Introduser en parameter

$$x_3 = t$$

for å representere en vilkårlig verdi for den ukjente som mangler ledende koeffisient, og fortsett med Gauss-Jordan-eliminasjon. I eksempelet erstattes rad 3, som bare inneholder nuller, med $(\,0 \quad 0 \quad 1 \quad t\,)$, og x_3 elimineres fra radene 1 og 2:

$$\begin{pmatrix} 3 & 16 & 50 & 33 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{introduser parameteren } x_3 = t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 16 & 50 & 33 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix} \quad \text{eliminer } x_3 \text{ fra radene 1 og 2}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 16 & 0 & 33 - 50t \\ 0 & 4 & 0 & 12 - 8t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix} \quad \text{løs for } x_2 \text{ og eliminer } x_2 \text{ fra rad 1}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 33 - 50t - 16(3 - 2t) \\ 0 & 1 & 0 & 3 - 2t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix} \quad \text{løs for } x_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 - 6t \\ 0 & 1 & 0 & 3 - 2t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}$$

Den parametriske løsningen kan skrives

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 - 6t \\ 3 - 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} t.$$

I kapittel 3 skal vi se hvordan vi kan tolke disse løsningene geometrisk: de ligger alle på en viss rett linje. Hvert punkt på linjen svarer til en spesiell verdi for t.

La oss rekapitulere hva vi har lært hittil. Vi trenger litt terminologi: Koeffisientene a_{ii} sies å ligge på *hoveddiagonalen*. En matrise der $a_{ij} = 0$ når $i > j$ sies å være *øvre triangulær*.

Gauss-Jordan-prosedyren starter med å gjøre den utvidede matrisen øvre triangulær, og hvis det korresponderende ligningssystemet har en entydig løsning, så ligger den ledende koeffisienten i hver rad på hoveddiagonalen.