



*Alt du trenger å vite om
skolematematikk,
kort og godt*

SKOLEMATEMATIKK

Kort og godt

Arne Hole

Skolematematikk

Kort og godt

Kort og godt-serien er en serie med kompakte lærebøker som går rett på sak, er korte og konsise, og som gjør det lett å finne frem til kjernen i stoffet. Bøkene er spesielt velegnet som repetisjonsbøker i forbindelse med eksamensforberedelser. Til nå har følgende titler kommet ut:

Christian Oxholm Zigler og Bitte Skaug Paulsen:
Markedsføringsledelse — Kort og godt

Morten Helbæk og Snorre Lindset:
Finansiering og investering — Kort og godt

Morten Helbæk:
Statistikk — Kort og godt

Brit Rohnes:
Matematikk for økonomer — Kort og godt

Morten Helbæk:
Operasjonsanalyse — Kort og godt

Rolf Nossun:
Lineær algebra — Kort og godt

Lisa Lorentzen:
Kalkulus for ingeniører — Kort og godt

Kjell Gunnar Hoff:
Bedriftsøkonomi — Kort og godt

Arne Hole:
Skolematematikk — Kort og godt

Arne Hole

Skolematematikk

Kort og godt

Universitetsforlaget

© Universitetsforlaget 2015

1. utgave 2015

2. utgave, 2. opplag 2021

ISBN E-utgave : 9788215042084

ISBN Papirbok: 978-82-15-02497-4

Materialet i denne publikasjonen er omfattet av åndsverklovens bestemmelser. Uten særskilt avtale med rettighetshaverne er enhver eksemplarframstilling og tilgjengeliggjøring bare tillatt i den utstrekning det er hjemlet i lov eller tillatt gjennom avtale med Kopinor, interesseorgan for rettighetshavere til åndsverk. Utnyttelse i strid med lov eller avtale kan medføre erstatningsansvar og inndragning, og kan straffes med bøter eller fengsel.

Henvendelser om denne utgivelsen kan rettes til:

Universitetsforlaget AS

Postboks 508 Sentrum

0105 Oslo

www.universitetsforlaget.no

Omslag: Universitetsforlaget/Sissel Tjernstad

Trykk og innbinding: 07 Media — 07.no

Boken er satt med: Times New Roman

Papir: 90 g Amber Graphic 1,25

Forord

Denne boken kan brukes som et hjelpemiddel for den som ønsker å gå igjennom skolematematikken og bygge det hele opp på nytt, med fokus på forståelse. Boken burde også kunne leses av skoleelever og andre som ønsker å lære matematikk de ikke har vært borti ennå. Bokens progresjonsmessige spenn er stort; den starter fra bunnen av med matematikk fra barnetrinnet og ender opp med stoff fra siste klassetrinn i videregående skole.

Ikke alle deler av alle matematikkurs i videregående skole er tatt med. Det som er dekket, er de delene av pensum som begynnerstudenter erfaringsmessig har størst behov for å repetere, og som er viktigst som fundament for videre studier. Mye av dette stoffet er ganske grunnleggende, særlig er algebra aktuelt.

Hvordan skal du som leser arbeide med boken? Mitt råd er at du lar det å *forstå teksten* være ditt hovedmål. Oppgavene er et *middel* til å nå dette målet. Selv om det å løse oppgaver også er et mål i seg selv, må du ikke la oppgavene være den store testen på om du har forstått stoffet. Når du skal arbeide med en seksjon i boken, bør du ta deg god tid og prøve å forstå alt du leser. Det kan være lurt å ha blokk og blyant ved siden av boken, og å *skrive* utregninger og liknende du prøver å forstå. Er mellomregninger utelatt i teksten, prøver du å fylle disse inn.

I denne boken bør du bruke deg selv som dommer, istedenfor å la oppgavene ha denne rollen. Vær ærlig med deg selv; spør deg stadig om du forstår dette “til bunns”. Er det noe uklart, så gjør alt du kan for å grave det opp. Prøv å lage deg din egen, private teoribygning som du føler du kan stole på. Om du så treffer på noen (mange?) oppgaver du ikke klarer å løse, skal du ikke la deg skremme. Det er ikke nødvendig å se på matematikk fra et prestasjonsperspektiv, som en slags konkurranse. Denslags har det vært altfor mye av i tradisjonell skole. Glem alt dette nå, og prøv heller å se hva det kan være for *deg* i dette, rent personlig.

Bak i boken finner du fasit til oppgavene. Avslutning av eksempler og begrunnelser i teksten er markert med en firkant: ■

Denne boken har lånt mye av stoffet fra min tidligere bok *Grunnleggende matematikk* (1.—4. utgave, Universitetsforlaget). Jeg vil takke alle som har gitt meg tilbakemeldinger og innspill på denne boken gjennom alle årene den har vært i bruk. Jeg har hatt stor nytte av dette i arbeidet med denne nye boken.

Oslo, juni 2015
Arne Hole

Innhold

1. Tall	1
1.1 Funnet på eller funnet ut?	1
1.2 Naturlige tall	2
1.3 Desimaltall	3
1.4 Addisjon	4
1.5 Subtraksjon	6
1.6 Multiplikasjon	7
1.7 Divisjon	10
1.8 Negative tall	13
1.9 Reelle tall: Alle tallene på tallinjen	18
1.10 Parenteser	21
1.11 Brøkgregning	23
1.12 Potensuttrykk	25
1.13 Røtter	26
1.14 Prosentbegrepet	28
1.15 Mengdenotasjon	28
1.16 Blandede oppgaver til kapittel 1	32
2. Algebra	33
2.1 Hva er algebra?	33
2.2 Variabelbegrepet	33
2.3 Arbeid med å lage formler og uttrykk	38
2.4 Omskriving av algebraiske uttrykk	45
2.5 Ti grunnleggende algebraiske lover	50
2.6 Bruk av de ti grunnleggende lovene	54
2.7 Noen flere råd for omskriving	56
2.8 Blandede oppgaver til kapittel 2	59
3. Likninger	65
3.1 Løsningsmetoder for likninger	65
3.2 Uoppstilte likninger	68
3.3 Regnefortellinger	70
3.4 Prosentregning og likninger	71
3.5 Andregradslikninger	74
3.6 Likningssystemer	76
3.7 Blandede oppgaver til kapittel 3	78
4. Statistikk og sannsynlighet	79
4.1 Statistikk	79
4.2 Kombinatorikk	83

- 4.3 Sannsynligheter 87
 4.4 Trinnvis utregning 91

5. Geometri 95

- 5.1 Plangeometri 95
 5.2 Planet 106
 5.3 Rette linjer 107
 5.4 Avstand, lengde og vinkler 110
 5.5 Mer om arealbegrepet 114
 5.6 Volumbegrepet 117

6. Funksjoner 119

- 6.1 Funksjonsbegrepet 119
 6.2 Praktiske anvendelser 122
 6.3 Noen typer funksjoner 126
 6.4 Eksponentialfunksjoner 128
 6.5 Logaritme-funksjoner 130
 6.6 Trigonometriske funksjoner 131

7. Derivasjon 139

- 7.1 Gjennomsnittlig endringsrate 139
 7.2 Øyeblikkelig endringsrate 140
 7.3 Den deriverte 144
 7.4 Anvendelser av derivasjon 151
 7.5 Mer om funksjoner og grenser 153
 7.6 Mer om den deriverte 158
 7.7 Den deriverte av sinus og cosinus 160
 7.8 Avtakende og voksende funksjoner 165
 7.9 Omvendte funksjoner 166
 7.10 Det naturlige grunntallet e 167
 7.11 Høyere ordens deriverte 169
 7.12 Funksjonsdrøfting 171

8. Integrasjon 175

- 8.1 Antideriverte 175
 8.2 Anvendelse: Arealberegninger 177
 8.3 Anvendelse: Volumberegninger 181
 8.4 Integralnotasjon 184
 8.5 Integrasjonsteknikker 186

Fasit 188

Stikkord 197

Kapittel 1

Tall

1.1 Funnet på eller funnet ut?

Innenfor matematikk kan man dele fagstoffet i to kategorier:

- det som er *funnet på*
- det som er *funnet ut*.

La meg ta et eksempel. At

$$4 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5$$

er en ting man har *funnet på*. Man har rett og slett blitt enige om at dersom man skriver en prikk mellom to hele, positive tall slik som dette, så er betydningen at det siste tallet skal legges sammen med seg selv så mange ganger som det første tallet sier. Dette er hva man kaller en *definisjon*. Det går ikke an å bevise eller begrunne en definisjon på noen annen måte enn å si at “dette er slik fordi man har bestemt det”. Et annet eksempel på en definisjon er

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Også dette er altså en ting man bare har funnet på. Uttrykket 2^3 (leses “to opphøyd i tredje”) er rett og slett en forkortet skrivemåte for $2 \cdot 2 \cdot 2$. Man har blitt enige om en slik forkortet skrivemåte ganske enkelt fordi man ofte får bruk for å multiplisere et tall med seg selv flere ganger.

La oss så gå over til et eksempel på noe man har *funnet ut*. Hvis du morer deg med å regne ut mange gangestykker i henhold til definisjonen av multiplikasjon gitt ovenfor, oppdager du raskt at du alltid får samme svar om du bytter rekkefølgen på de to tallene som ganges sammen. For eksempel får vi, ved å addere,

$$2 \cdot 3 = 3 + 3 = 6$$

mens vi også får

$$3 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 = 6$$

Man kan spørre seg om dette er tilfeldig. Eller sagt på en annen måte: Blir det alltid sånn? Faktum er at det blir det, og dette er da et eksempel på noe man har funnet *ut*. Man har nemlig funnet et lite, søtt *bevis* for at dette prinsippet gjelder for alle tall. Dette beviset skal vi komme tilbake til senere. Man refererer ofte til prinsippet ved å si at “faktorenes orden er likegyldig”.

Ting man har funnet ut i matematikken, kalles gjerne *setninger* eller *teoremer*. Ordet *teorem* henger sammen med ordet *teori*; man kan si at et teorem er en byggekloss i en teori. I skolesammenheng er det vanlig å bruke ordet “setning” istedenfor “teorem”, for eksempel snakker man om setningen til Pytagoras. I denne boken vil jeg imidlertid bruke teorem-betegnelsen, fordi jeg tror det gjør at distinksjonen mellom funnet på og funnet ut blir mer synlig.

Hvert matematisk teorem trenger et bevis, altså en begrunnelse. Matematiske begrunnelser kan gis på mange ulike nivåer. Man kan gi både intuitive, uformelle forklaringer og mer formelle beviser. Et fullstendig matematisk bevis er en type begrunnelse som det stilles spesielle krav til. Selv om vi i denne boken skal bygge opp teorien i logisk rekkefølge, inneholder den ikke fullstendige beviser for alle resultatene. For å markere at vi tillater litt bruk av intuisjon, har jeg brukt betegnelsen “begrunnelse” istedenfor “bevis”.

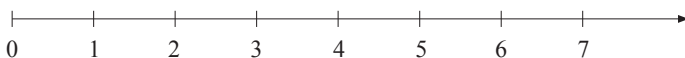
1.2 Naturlige tall

Med de *naturlige tallene* mener man tallene

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots$$

Om man regner med 0 blant de naturlige tallene eller ei, er en smaksak. Vi gjør det her i denne boken.

For å gi et systematisk oversikt over de naturlige tallene, kan vi tegne opp en linje der tallene ligger i rekkefølge bortover med jevne mellomrom:



Dette kalles en *tallinje*. Pilspissen til høyre skal bety at linjen fortsetter videre. Slik vi skriver tallene i vår kultur, baserer vi oss på gruppering i *tiere*. Man sier at vi bruker et *posisjonssystem med basetall ti*. Vi bruker ti *sifre* 0, 1, 2, $\dots$, 9 til å skrive tallene med. Tallet

tolkes som 3 fulle “tiergrupper” av det vi regner med (f.eks. kroner), samt 5 enkeltstående eksemplarer i tillegg.

Tierne kan så igjen grupperes sammen ti og ti og danne *hundregupper*, og så videre. Tallet

345

tolkes som 3 fulle hundregupper, 4 tiergrupper og 5 enere.

Grunnen til at notasjonssystemet vi har for tall kalles et *posisjonssystem*, er at *posisjonen* hvert siffer står i, spiller en rolle for bidraget til tallets totalverdi. For eksempel bidrar sifferet 3 i tallet 345 med 300 til tallets verdi, mens det i tallet 23 kun bidrar med 3.

Den historiske årsaken til at vi benytter gruppering i tiere, er høyst sannsynlig at vi har ti fingre. Rent bortsett fra dette er antallet ti i denne sammenhengen ganske tilfeldig. Vi kunne like gjerne benyttet oss av et annet basetall.

Det er heller ingen nødvendighet å benytte et posisjonssystem, altså et notasjonssystem der posisjonen til et symbol i et tall har noe å si for bidraget til tallets verdi. Historisk var de første notasjonssystemene for tall som ble utviklet, såkalte *additive* systemer. I et additivt system legger man ganske enkelt sammen verdien til hvert enkelt symbol i tallet for å finne tallets verdi. Hadde systemet vårt vært additivt, ville altså både 32 og 23 vært lik 5.

1.3 Desimaltall

Også når det gjelder *desimaltall* er det gruppering i tiere vår kultur baserer seg på i sin notasjon. I et desimaltall kan vi ha *tideler*, *hundredeler*, *tusendeler* osv. av det vi regner med. Begrepene er definert ved at

- 10 tideler utgjør en hel
- 100 hundredeler utgjør en hel

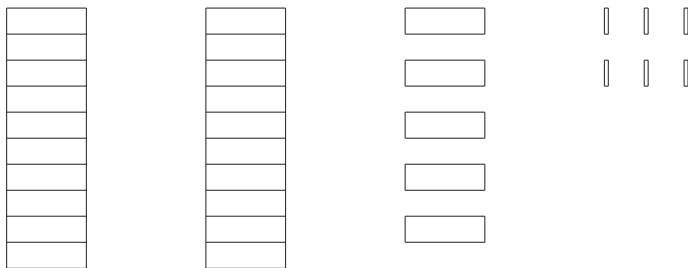
og så videre. For å forstå desimaltallsbegrepet, er det avgjørende at man kan tenke i konkretiseringer og tolkninger. For eksempel er

2.56

et desimaltall som kan tolkes som

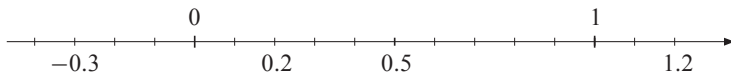
- 2 hele eksemplarer av “noe”, pluss
- 5 tideler av “noe”, pluss
- 6 hundredeler av “noe”.

“Noe” kan f.eks. være en sjokoladeplate. Tallet kan da tegnes slik:

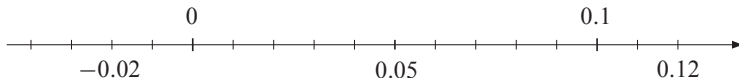


Merk at jeg skriver desimalkommaet i tallet 2.56 som et punkt, ikke et komma. Dette er den mest brukte skrivemåten internasjonalt. I norsk notasjon ville tallet ovenfor blir skrevet 2,56. Den norske skrivemåten har imidlertid store ulemper, blant annet når vi skal lage en liste av tall, og når vi skal skrive punkter i planet, se senere. Jeg bruker derfor desimalpunkt istedenfor desimalkomma i denne boken. Skulle man være konsekvent, burde da et tall som 4.3 leses “fire punkt tre” istedenfor “fire komma tre”. Siden det imidlertid nok vil ta noen år før denne endringen slår gjennom i Norge, bruker jeg ordet “komma” når jeg omtaler desimaltall her i boken.

De sifrene som står bak kommaet i et desimaltall, kalles tallets *desimaler*. I tallet 6.84 vil man si at 8 er “første desimal”, mens 4 er “annen desimal”. For å plassere de tallene som har én desimal, deler vi hver av bitene mellom de hele tallene i ti like biter:



Blant annet får vi her plassert tallet 2.5, som vil gi oss svaret på regnestykket $5 : 2$. Skal vi få plassert tallene med to desimaler, må vi dele hver av de små bitene langs tallinjen opp i ytterligere ti deler:



Og så videre. Merk at vi selvsagt har

$$4.00 = 4.0 = 4,$$

dvs. hele tall kan oppfattes som desimaltall der alle desimalene er 0. På tilsvarende måte er $0.5 = 0.50$ og slikt. Med andre ord: Å legge til nye nuller

bakerst som desimaler, endrer ikke verdien til et desimaltall. Det er bare snakk om ulike skrivemåter for samme tall.

1.4 Addisjon

Den mest grunnleggende regneoperasjonen man har for tall, er *addisjon*. Å *addere* kalles også å *legge sammen*. Eksempler:

$$3 + 5 = 8 \quad (\text{leses "tre pluss fem er lik åtte"})$$

$$7 + 8 = 15 \quad (\text{leses "sju pluss åtte er lik femten"})$$

Formelt sett kan vi alltid bruke talllinjen til å finne svaret på slike addisjonsstykker. For å finne ut hva $3 + 5$ er for noe, teller vi først tre hakk og deretter fem hakk oppover fra null. Da kommer vi til 8. Altså: $3 + 5 = 8$. Vi kan si at slik telling på tallinjen er det som formelt sett *definerer* addisjon for naturlige tall.

La oss så gå videre til addisjon av desimaltall. Reglene for dette følger sunn fornuft, gitt at man har forstått betydningen av tideler, hundredeler og så videre.

Eksempel 1 Vi har $2.34 + 4.25 = 6.59$, fordi

2 hele, 3 tideler og 4 hundredeler av "noe", pluss

4 hele, 2 tideler og 5 hundredeler av "noe"

til sammen blir 6 hele, 5 tideler og 9 hundredeler. ■

Eksempel 2 Vi har $2.56 + 0.28 = 2.84$, fordi

2 hele, 5 tideler og 6 hundredeler av "noe", pluss

0 hele, 2 tideler og 8 hundredeler av "noe"

til sammen blir 2 hele, 7 tideler og 14 hundredeler. Vi kan så "veksle inn" 10 av hundredelene til en ekstra tidel, og svaret blir 2 hele, 8 tideler og 4 hundredeler. ■

Oppgave 1

Regn ut følgende ved å bruke egen, logisk tenkemåte. Lag gjerne konkretiseringer eller tolkninger.

a) $5.6 + 2.8$

b) $1.23 + 3.39$

c) $6.7 + 2.58$

Oppgave 2

En elev har arbeidet med oppgaver der man skal addere desimaltall. Eleven leverer følgende besvarelse:

$$2.12 + 1.34 = 3.46 \qquad 2.8 + 1.5 = 3.13 \qquad 0.16 + 0.8 = 0.24$$

Hvilken mulig feiloppfatning kan dette tyde på?

Algoritmer

Med en *algoritme* menes en fast metode man kan bruke for å få gjort noe. I skolen lærer man blant annet algoritmer for de fire regningsartene addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon. Man har noen algoritmer for flersifrede tall, og litt modifiserte utgaver for desimaltall.

Det å trene seg opp til å regne superraskt ved hjelp av algoritmer er imidlertid ikke lenger så viktig som det en gang var. I dag bruker man digitale hjelpemidler til tallregning hvis hastighet og nøyaktighet spiller en rolle. Det viktigste i dag er å forstå hva de ulike regneoperasjonene betyr (hvordan de er definert, formelt sett), og at du er i stand til å finne svaret på regnestykkene *i prinsippet* ved å tenke deg frem. Om dette tar litt lang tid, er det ofte ikke noe problem.

Oppgave 3

Temaet i denne seksjonen er addisjon, og i denne oppgaven skal vi se på algoritmer for denne regneoperasjonen.

- Standardalgoritmen for addisjon av flersifrede, naturlige tall baserer seg på å sette tallene under hverandre og bruke “mentetall”. Forklar denne algoritmen for hverandre ved å bruke konkretisering eller tolkning.
- Gjør tilsvarende med algoritmen for addisjon av desimaltall med en desimal, og deretter for addisjon av desimaltall med to desimaler.

1.5 Subtraksjon

Å *subtrahere* betyr å *trekke fra*. For eksempel er $13 - 7 = 6$, som vi leser “13 minus 7 er lik 6”. Subtraksjon av naturlige tall introduseres svært tidlig i skolen, og der fins mange ulike tankemodeller man kan bruke for å forstå denne regneoperasjonen. Den kanskje mest åpenbare er “har, tar vekk”-tankegangen. Eksempel: Eli har 7 epler, og gir bort 4. Hvor mange har hun igjen? Svar: $7 - 4 = 3$, så hun har igjen 3 epler. En annen modell for subtraksjon er “hvor mange som mangler”. Eksempel på denne: Per har 12 kroner, og vil

kjøre en pølse som koster 15 kroner. Hvor mange kroner mangler han? Svar: $15 - 12 = 3$, så han mangler 3 kroner.

En tredje tankemodell, som er i slekt med “mangler”-modellen, er “gjetting”-metoden. Den består i å *tilbakeføre subtraksjon til addisjon*. Eksempel: Anta at vi skal finne svaret på minusstykket $13 - 7$. Vi spør oss da: Hvilket tall må vi addere til 7 for å få 13? Her kan vi i prinsippet prøve oss frem med ulike tall. Til slutt finner vi at 6 passer, så ergo er $13 - 7 = 6$. Matematikkfaglig sett er det faktisk denne “gjetting”-tankegangen som tilsvarer det man vanligvis tar som *definisjonen* av subtraksjon. Man kan si at svaret på minusstykket $13 - 7$ per definisjon er det tallet t som er slik at $t + 7 = 13$. (Merk at jeg her brukte en bokstav som symbol for et tall for å få frem poenget. Vi skal komme tilbake til slikt senere.) Altså:

$$13 - 7 = 6 \quad \text{pr. definisjon fordi} \quad 6 + 7 = 13$$

Et eksempel på gjettemetoden ved subtraksjon av desimaltall:

$$2.9 - 1.6 = 1.3$$

fordi det stemmer med at $1.3 + 1.6 = 2.9$.

Oppgave 1

I denne oppgaven skal vi se på algoritmer for subtraksjon.

- Standardalgoritmen for subtraksjon av flersifrede, naturlige tall baserer seg på å sette tallene under hverandre og bruke “låning”. Forklar denne algoritmen for hverandre ved å bruke konkretisering eller tolkning.
- Gjør tilsvarende med algoritmen for subtraksjon av desimaltall med en desimal, og deretter for subtraksjon av desimaltall med to desimaler.

1.6 Multiplikasjon

Begrepet *multiplikasjon* introduseres først for naturlige tall, og består da i *gentatt addisjon*. Eksempler:

$5 \cdot 3$	betyr	$3 + 3 + 3 + 3 + 3$	(5 ganger 3)
$2 \cdot 11$	betyr	$11 + 11$	(2 ganger 11)
$3 \cdot 5$	betyr	$5 + 5 + 5$	(3 ganger 5)
$1 \cdot 7$	betyr	7	(1 ganger 7)
$0 \cdot 4$	betyr	0	(0 ganger 4, ingen firere)
$4 \cdot 0$	betyr	$0 + 0 + 0 + 0$	(4 ganger 0)

Vi kan nå lage regnestykker av typen

$$5 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15.$$

Uttrykket $5 \cdot 3$ kalles et *produkt*, og de to tallene 5 og 3 kalles *faktorer* i dette produktet. Tilsvarende kalles uttrykk av typen $5 + 3$ en *sum*, og de to tallene 5 og 3 kalles *ledd* i summen.

I et gangestykke med naturlige tall forteller altså det første tallet hvor mange ganger det andre tallet skal legges sammen med seg selv. Vi kan formulere det slik, litt intuitivt:

Definisjon 1 Multiplikasjon

I et gangestykke forteller det første tallet *hvor mange eksemplarer* vi skal ha av det andre tallet.

Fordelen med å formulere definisjonen av multiplikasjon slik, er at den nå kan brukes også for andre typer tall enn bare naturlige. Vi skal se på det snart. Merk først og fremst følgende:

Ifølge definisjonen av multiplikasjon kan man lese prikken i et gangestykke som “eksemplarer av”, eller eventuelt bare “av”.

Man kan altså lese $13 \cdot 4$ som “trenten eksemplarer av fire”, for eksempel.

Oppgave 1

Regn ut stykkene nedenfor ved å bruke definisjonen av multiplikasjon, dvs. ved å bruke gjentatt addisjon. Eksempel: $3 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 = 6$. Kalkulator og gangetabellpugg er forbudt i akkurat denne oppgaven.

- a) $3 \cdot 6$ b) $3 \cdot 7$ c) $7 \cdot 30$ d) $6 \cdot 7$

Multiplikasjon av desimaltall

La oss nå gå over til multiplikasjon av desimaltall. Ved tankegang for gjentatt addisjon er det klart at

$$\begin{aligned} 4 \cdot (3.21) &= 3.21 + 3.21 + 3.21 + 3.21 \\ &= 12.84 \end{aligned}$$

Sagt på en annen måte: 4 eksemplarer av 3.21 blir 12.84. Tolkning: 4 poser som veier 3.21 kg hver, veier til sammen 12.84 kg.

På denne måten får man definert og regnet ut alle gangestykker der det første tallet er et helt tall. Men hva hvis ingen av dem er hele? La oss se på for eksempel

$$2.5 \cdot 4.6$$

Her skal vi ha 2.5 *ganger* 4.6, dvs. vi skal ha

2.5 *eksemplarer* av tallet 4.6

To og et halvt eksemplar, altså. Hva blir dette? Jo, et halvt eksemplar er 2.3, så alt i alt blir svaret

$$4.6 + 4.6 + 2.3 = 11.5$$

Dette er en svært nyttig tenkemåte. Her kommer det generelle prinsippet for multiplikasjon av desimaltall, forklart ved et eksempel:

Multiplikasjon av desimaltall Anta at vi skal finne

$$2.3 \cdot 7.9$$

Ved definisjonen av multiplikasjon skal vi altså her ha 2.3 eksemplarer av tallet 7.9. Dette blir det samme som 2 hele eksemplarer, pluss 3 *tideler* av 7.9. Vi har

- To hele eksemplarer av 7.9 er $2 \cdot 7.9 = 15.8$
- En tidel av 7.9 er 0.79, så 3 tideler er $3 \cdot 0.79 = 2.37$

Til sammen blir dette

$$2.37 + 15.8 = 18.17,$$

med andre ord er $2.3 \cdot 7.9 = 18.17$.

Vi kan også ha gangestykker der vi skal ha “mindre enn et helt eksemplar”. For eksempel blir tolkningen av regnestykket $0.5 \cdot 10$ at vi skal ha et halvt eksemplar av tallet 10. Dette blir 5. Ergo: Når man trekker inn desimaltall, kan man oppleve at svaret i et gangestykke blir *mindre enn* ett av (eller begge) tallene i gangestykket.

Oppgave 2

Regn ut følgende ved å bruke definisjonen av multiplikasjon av desimaltall direkte. NB: Det er forbudt å bruke at faktorenes orden er likegyldig! (Det har vi ikke bevist ennå.) Tegn gjerne figurer hvis du vil. Sjekk svarene med kalkulator etterpå.

a) $4 \cdot 3.4$

b) $5.6 \cdot 8$

c) $3.2 \cdot 10.4$

Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi se på algoritmer for multiplikasjon.

- Prøv å huske hvordan du lærte å multiplisere et flersifret, naturlig tall med et ensifret, altså for eksempel $23 \cdot 5$. Kan du forklare hvorfor denne algoritmen blir riktig?
- Gjør tilsvarende med algoritmen for multiplikasjon av flersifrede naturlige tall med flersifrede naturlige tall. Begrens gjerne til tosifrede tall for å få det enklere. Det er vanlig at man “rykker inn” når man setter tallene under hverandre. Hvorfor?
- Se på algoritmene for multiplikasjon av desimaltall. Hvorfor blir reglene for kommasetting slik de blir?

1.7 Divisjon

Å *dividere* betyr å *dele*. For eksempel er $24 : 6 = 4$, som vi leser “24 delt på 6 er lik 4”. Også for divisjon fins det mange ulike tankemodeller man kan bruke. Vi skal se på tre modeller, nemlig *delingsdivisjon*, *målingsdivisjon* og *gjettemetoden* (tilbakeføring til multiplikasjon).

Delingsdivisjon og målingsdivisjon

I *delingsdivisjon* tolker man delestykket ved å tenke at vi har noe som skal fordeles likt til et visst antall mennesker eller andre objekter. Eksempel: 12.4 kg kjøtt skal deles likt mellom 4 mennesker. Hver får da $12.4 : 4 = 3.1$ kg kjøtt. I delingsdivisjon skal det tallet man deler på alltid være et blankt tall uten enhet, altså et rent *antall*.

La oss nå gå over til delestykket

$$0.8 : 0.2$$

Her er det ikke mulig å finne svaret ved å tenke delingsdivisjon, fordi tallet vi deler på ikke er et helt tall. Vi kan ikke tenke oss at noe skal deles på 0.2 personer. Imidlertid kan vi finne svaret ved å bruke *målingsdivisjon*. Da kan vi for eksempel tenke slik: Hvis du har en mugge med 0.8 liter saft, hvor mange glass på 0.2 liter kan du da fylle? Svaret er 4, så ergo

$$0.8 : 0.2 = 4$$

I målingsdivisjon blir altså *svaret vårt* et blankt tall, et rent antall. Tallet vi deler på, kan derimot ha en enhet. Dette er omvendt av situasjonen i delingsdivisjon.