Tom Lindstrøm

# KALKULUS

4. utgave



UNIVERSITETSFORLAGET

# Kalkulus

Tom Lindstrøm

# Kalkulus

4. utgave

Universitetsforlaget

© Universitetsforlaget, Oslo, 2019
ISBN: 9788215040226
1. utgave, 1. versjon, Universitetsforlaget, 2019
E-utgaven baserer seg på 4. trykte utgave, Universitetsforlaget 2016

Omslagsdesign: Sissel Tjernstad, Universitetsforlaget
Sats: Type-it AS, Trondheim

Materialet i denne publikasjonen er omfattet av åndsverklovens bestemmelser. Uten særskilt avtale med Universitetsforlaget er enhver eksemplarfremstilling og tilgjengeliggjøring bare tillatt i den utstrekning det er hjemlet i lov eller tillatt gjennom avtale med Kopinor, interesseorgan for rettighetshavere til åndsverk.

www.universitetsforlaget.no
post@universitetsforlaget.no

*Til*
*Nann, Jonas, Pia,*
*Anders og Kaja*

# Forord

> Så det er ingen overdrivelse å si at det var Christine A. som endelig satte matematikken inn i sin rette kontekst for Jonas Wergeland, som viste ham forbindelsen mellom matematikken og livet.
>
> *— Jan Kjærstad (1953–), Forføreren*

Dette er en innføringsbok i matematikk for universiteter og høyskoler. Den bygger på full fordypning fra videregående skole, altså på de kursene som de siste årene har hett R1 og R2. Hovedtemaet er differensial- og integralregning i én variabel med anvendelser på differensialligninger og rekker, men boken inneholder også en del temaer som ikke er med i et typisk kalkuluskurs, f.eks. komplekse tall, differensligninger og en del anvendelser i sannsynlighetsteori.

Jeg har forsøkt å skrive en bok som legger omtrent like mye vekt på teori, regneteknikk og anvendelser. Etter min mening er alle disse tre komponentene nødvendige for virkelig å forstå matematikk – teoriforståelse uten regneteknikk har ingen nytteverdi, og anvendelser uten teoriforståelse fører bare til en meningsløs kopiering av formler som man hverken kan begrunne eller tolke. I de senere år har regneteknikk utviklet seg fra kun å gjelde regning med papir og blyant til også å omfatte beregninger med datamaskin og dataprogrammer, og selv om dette ikke skal være en lærebok i numerisk analyse, har jeg prøvd å ta hensyn til denne utviklingen både når det gjelder stoffutvalg og oppgaver.

I tillegg til de tre hovedkomponentene teori, regneteknikk og anvendelser har jeg valgt å trekke frem et fjerde aspekt – matematikkens historie og utvikling. Selv om det ikke er så lett å få øye på i matematikkbøker flest, er matematikk faktisk skapt av mennesker, noen ganger i samarbeid, andre ganger i kappestrid. I de historiske epistlene i slutten av hvert kapittel har jeg forsøkt å beskrive både hvordan matematiske teorier vokser frem i vekselvirkning med den generelle historiske utviklingen, og hvordan de er knyttet til sine skaperes liv og skjebne.

Selv om boken bygger på matematikken i videregående skole, er det en del overlapp, både fordi jeg (klok av skade) vet at læreplaner kan endre seg raskere enn lærebøker, og fordi man trenger litt overlapp for å sikre en glatt skjøt. Dette forklarer f. eks. hvorfor kapitlet om differensialligninger starter fra bunnen av.

## Forskjellige måter å bruke boken på

Da jeg planla boken, var jeg opptatt av å skape en veksling mellom teori, regneteknikk og anvendelser. For mye teori på en gang blir fort tungt for mange studenter, og illustrerende anvendelser hjelper på motivasjonen. Dette er f.eks. en av grunnene til at jeg har plassert seksjonen om differensligninger mellom de mer teoretiske kapitlene om komplekse tall og kontinuerlige funksjoner. Porsjonerer man ut oppgavene med litt omtanke, slipper man på denne måten lange perioder der alle oppgavene har et teoretisk tilsnitt.

Selv om boken er skrevet med en spesiell rytme i tankene, kan den selvfølgelig brukes på annen måte enn å begynne på kapittel 1 og avslutte med kapittel 12. Ønsker man et klassisk kalkuluskurs, er kjernen i boken kapittel 5–9 med de andre kapitlene som mulige anvendelser og utdypninger (jeg vil anslå denne kjernen til 5–6 studiepoeng, så man har god plass til mer stoff i et kurs på 10 studiepoeng). Før man begynner på kapittel 5, bør man imidlertid ta med seg litt om reelle tall og kompletthetsprinsippet fra kapittel 2 samt gjennomgå seksjon 4.3 om konvergens av følger. Et slikt stramt kalkulusopplegg får dermed oppbygningen vist på figuren nedenfor. Vær oppmerksom på at dette opplegget har en svært teoritung start, og at det kan være lurt å supplere med noe enklere stoff fra de første kapitlene.




Med tanke på de ivrigste studentene har jeg skrevet en bok som er teoretisk selvforsynt. Dersom man godtar det studentene har med seg fra skolematematikken om enkel algebra og elementære funksjoner, gir boken en stringent innføring i teorien for funksjoner av en variabel. Det betyr selvfølgelig ikke at alle studenter skal lese og forstå hvert eneste bevis, og det betyr slett ikke at alle forelesere skal dekke hele teoristoffet

(da vil man raskt oppdage at tiden blir knapp). For mine egne forelesninger har jeg definert en «ryggrad» av teoristoff som jeg alltid dekker, og så supplerer jeg med annet stoff etter tid og omstendigheter. Holder vi oss til kjernestoffet i figuren ovenfor, består denne ryggraden av kompletthetsprinsippet (seksjon 2.3), konvergens av monotone følger (seksjon 4.3), $\epsilon$-$\delta$-bevis (seksjon 5.1), skjæringssetningen (seksjon 5.2), ekstremalverdisetningen (seksjon 5.3), middelverdisetningen (seksjon 6.2), «$0/0$»-tilfellet av L'Hôpitals regel (seksjon 6.3) og analysens fundamentalteorem (seksjon 8.3 – men her postulerer jeg ofte setning 8.3.1). I tillegg utleder jeg selvfølgelig (men ikke alltid i full detalj) grunnleggende formler for integrasjonsmetoder, omdreiningslegemer, løsninger av differens- og differensialligninger osv. Jeg nedprioriterer mer tekniske bevis som grenseverdier av summer, produkter osv. fordi de ofte tar lang tid og bare beviser ting som studentene anser som opplagt uansett. Fordelen med «ryggraden» ovenfor er at den ikke bare består av enkeltbevis, men illustrerer hvordan en matematisk teori bygges opp ved at nye resultater føyes til gamle.

I anvendelsene har mitt hovedmål vært å få studentene til å stille opp stykkene selv. Derfor finnes det bare noen få eksempler der anvendelsene kun fungerer som staffasje rundt et ferdig oppstilt regnestykke – i de fleste tilfellene vil jeg ha med studentene hele veien fra den opprinnelige problemstillingen, via den matematiske formuleringen og den regnetekniske løsningen, frem til drøfting av svaret i den opprinnelige situasjonen. Jeg synes det er bedre med et litt trivielt og dagligdags problem der studentene kan være aktivt med i modelleringen, enn en avansert anvendelse fra vitenskap og teknologi der de bare blir fortalt at en komplisert formel representerer en eller annen viktig sammenheng. Dette betyr nok at denne boken inneholder færre eksempler på «tunge» anvendelser enn mange andre, men samtidig håper jeg at den gir studentene et bedre grunnlag for selv å bruke matematikk som et redskap i andre fag. Det betyr også at anvendelsene i større grad er samlet i noen avsnitt og ikke strødd jevnt utover hele boken – skal man lære å modellere, trenger man å øve seg i situasjoner som ikke skiller seg for mye fra hverandre. Flest anvendelser finner man i kapitlene om differensligninger og differensialligninger og i avsnittene om optimering og koblede hastigheter i begynnelsen av kapittel 7, og personlig føler jeg at noen av disse temaene bør med for å gi et kurs en rimelig balanse mellom teori og praksis.

Historisk sett er kalkulus først og fremst et regneverktøy som ble utviklet av Newton og Leibniz på slutten av sekstenhundretallet, og som viste seg å ha en forbløffende slagkraft sammenlignet med tidligere teknikker. Det er fortsatt nødvendig å beherske dette verktøyet for å lykkes med matematikk og andre realfag, men i våre dager kan de klassiske regneteknikkene kombineres med og suppleres av datamaskinenes regnekraft. Hvordan dette best kan gjøres i undervisningen, er fortsatt et omstridt tema både faglig og didaktisk. Denne boken inneholder en del stoff og oppgaver som egner seg for datamaskiner og avanserte lommeregnere, men den legger ikke opp til bruk av en spesiell programpakke eller en spesiell kalulator. Ved Universitetet i Oslo har vi brukt boken i samspill med alt fra generelle programmeringsspråk (Java og Python) til et spesialisert, symbolbehandlende matematikkprogram (Maple), men vi har også hatt eksamener uten tillatte hjelpemidler for å kurere ekstreme tilfeller av kalkulatoravhengighet.

## Endringer i fjerde utgave

Den synligste endringen i fjerde utgave er at boken har fått ny grafisk utforming. Innholdsmessig er det ingen større strukturelle endringer, men jeg har gått igjennom hele teksten og gjort utallige lokale endringer – forhåpentligvis til det bedre. Jeg har spesielt prøvd å utdype en del forklaringer der jeg synes de tidligere har vært i knappeste laget. Jeg har også lagt til noen nye oppgaver i seksjoner der det var få oppgaver fra før. For ikke å forstyrre nummereringen har jeg plassert disse oppgavene etter de gamle, selv om dette noen ganger bryter litt med den naturlige progresjonen.

«Støtteapparatet» rundt læreboken er blitt forsterket, først og fremst ved at studieboken kommer i en ny og oppgradert utgave ved Arne Hole. Den nye utgaven ligger tettere opptil læreboken enn før og presenterer en del sentralt lærestoff på en alternativ måte. Den inneholder også en del repetisjonsstoff fra videregående skole for dem som trenger det.

Bokens nettsider

http://www.universitetsforlaget.no/kalkulus

inneholder trykkfeillister, oppdateringer og løsningsforslag til oppgaver. I tillegg inneholder de en del stoff som det ikke er blitt plass til i boken, blant annet tre tilleggskapitler om henholdsvis vektorregning og parametrisert kurver, flervariabel analyse og enkel lineær algebra samt optimering av funksjoner av flere varable. Dette stoffet er til fri avbenyttelse, og det kan gjøre det enklere for læresteder å bruke boken selv om det er enkelte temaer man savner. Nettsiden lenker også til en serie videoer fra Universitetet i Oslo som dekker sentrale temaer fra boken.

## Takk

Det er mange å takke! La meg begynne med en takk til de universitetene og høyskolene som har tillatt meg å benytte deres gamle eksamensoppgaver i denne boken. Disse oppgavene er merket med forkortelser som burde være lette å forstå; UiB er Universitetet i Bergen, IH er ingeniørhøyskolene osv. Forkortelsen NTNU dekker også oppgaver fra de tidligere institusjonene NTH og AVH. Noen steder har det vært nødvendig å redigere oppgavene litt for å tilpasse dem bokens notasjon og terminologi.

Det var Anne-Berit Tuft i Universitetsforlaget som i sin tid hadde ideen om en innføringsbok i matematisk analyse for det norske markedet, og uten hennes iver og entusiasme hadde denne boken aldri blitt til. Etter at Anne-Berit sluttet i forlaget, har John Homb, Sven Barlinn, Diddi Hernes, Ellen Jakobsen, Geir Tufteland, Erik Juel, Eli Valheim og Jannicke Bærheim overtatt stafettpinnen. En spesiell takk til Jannicke som har ansvaret for fjerdeutgaven! En takk også til Dina Haraldsson som transformerte min ubehjelpelige tekstbehandling av førsteutgaven til et profesjonelt råmanus, og til Torkel Haufmann som gjorde en stor innsats ved å rense manuset for gamle makroer og klargjøre det for den fjerde utgaven.

På den faglige siden må den største takken gå til Anders Høyer-Berg som leste utkastet til førsteutgaven med falkeblikk og reddet meg fra utallige pinlige episoder. Jeg har også satt stor pris på faglige innspill fra blant andre Ebbe Thue Poulsen, Kari og Per Hag, Bent Birkeland, Halvard Arntzen, Anders Øksendal, Klara Hveberg, Knut Vedeld, Knut Mørken, Harald Hanche-Olsen og Inger Christin Borge. En stor takk

også til alle dem som har gjort meg oppmerksom på trykkfeil, uklarheter – og det som verre er!

Som tidligere utgaver er også denne tilegnet min familie – Nann, Jonas, Pia, Anders og Kaja. Noen av dem har til og med vært ufornuftige nok til å ta kurs basert på boken!

Blindern, februar 2016

*Tom Lindstrøm*

# Innhold

**Forord** 7
Forskjellige måter å bruke boken på . . . 8
Endringer i fjerde utgave . . . 10
Takk . . . 10

**Innledning: Å studere matematikk** 19
Undervisningsformer . . . 19
Matematikkens språk . . . 21
Matematiske resonnementer . . . 22
Hvordan boken er bygd opp . . . 24
Oppgaver til innledningen . . . 25

**1 Naturlige tall** 27
1.1 Grunnleggende egenskaper . . . 27
Summetegn . . . 28
Oppgaver i seksjon 1.1 . . . 32
1.2 Induksjonsbevis . . . 35
Oppgaver i seksjon 1.2 . . . 39
1.3 Litt kombinatorikk . . . 41
Sannsynligheter . . . 46
Oppgaver i seksjon 1.3 . . . 48
1.4 Pascals trekant og binomialformelen . . . 53
Oppgaver i seksjon 1.4 . . . 58
1.5 Polynomer og polynomdivisjon . . . 61
Oppgaver i seksjon 1.5 . . . 66
1.6 Historisk epistel: Matematikkens fremvekst og tallteoriens historie . 67
Matematikk i oldtiden – de første skriftlige kildene . . . 68
Tallteoriens historie . . . 72

**2 Reelle tall** 85
2.1 Mengder, intervaller og tallverdier . . . 86
Tallverditegn . . . 88
Oppgaver i seksjon 2.1 . . . 90
2.2 Rasjonale og irrasjonale tall . . . 92
Oppgaver i seksjon 2.2 . . . 97
2.3 Kompletthet av de reelle tallene . . . 101
Oppgaver i seksjon 2.3 . . . 104
2.4 En beskrivelse av de reelle tallene . . . 106

Oppgaver i seksjon 2.4 . . . 109
2.5 Historisk epistel: Fremveksten av de reelle tallene . . . 110

**3 Komplekse tall 115**
3.1 Regneregler for komplekse tall . . . 117
Oppgaver i seksjon 3.1 . . . 121
3.2 Geometrisk tolkning av komplekse tall . . . 123
Polarform . . . 124
Geometrisk tolkning av multiplikasjon . . . 126
Generelle egenskaper . . . 127
Oppgaver i seksjon 3.2 . . . 130
3.3 Komplekse eksponentialer og de Moivres formel . . . 133
Oppgaver i seksjon 3.3 . . . 137
3.4 Å trekke røtter av komplekse tall . . . 140
Komplekse annengradsligninger . . . 143
Oppgaver i seksjon 3.4 . . . 146
3.5 Algebraens fundamentalteorem . . . 149
Reell faktorisering . . . 150
Oppgaver i seksjon 3.5 . . . 153
3.6 Historisk epistel: Komplekse tall og ligningenes historie . . . 156

**4 Følger 165**
4.1 Homogene differensligninger . . . 166
Tilfelle 1: To reelle røtter . . . 170
Tilfelle 2: Én reell rot . . . 173
Tilfelle 3: To komplekse røtter . . . 174
Oppsummering . . . 178
Anvendelser . . . 179
Oppgaver i seksjon 4.1 . . . 182
4.2 Inhomogene differensligninger . . . 185
$f(n)$ er et polynom . . . 189
$f(n)$ er på formen $a^n p(n)$ . . . 190
$f(n)$ er på formen $b^n(A\sin(an) + B\cos(an))$ . . . 192
Anvendelser . . . 193
Oppgaver i seksjon 4.2 . . . 197
4.3 Konvergens av følger . . . 205
Oppgaver i seksjon 4.3 . . . 213
*4.4 Kompletthet og konvergens . . . 218
Oppgaver i seksjon 4.4 . . . 223
4.5 Historisk epistel: Fra kaniner til kaos . . . 225

**5 Kontinuerlige funksjoner 229**
5.1 Kontinuitet . . . 231
Oppgaver i seksjon 5.1 . . . 239
5.2 Skjæringssetningen . . . 243
Oppgaver i seksjon 5.2 . . . 247
5.3 Ekstremalverdisetningen . . . 249
Oppgaver i seksjon 5.3 . . . 253
5.4 Grenseverdier . . . 254

Oppgaver i seksjon 5.4 . . . 263
*5.5 Bevis for algebraens fundamentalteorem . . . 265
5.6 Historisk epistel: Funksjonsbegrepets utvikling . . . 270

**6 Deriverbare funksjoner 279**
6.1 Derivasjon . . . 279
Regneregler for deriverte . . . 282
Logaritmisk derivasjon . . . 287
Oppgaver i seksjon 6.1 . . . 288
6.2 Middelverdisetningen . . . 289
Oppgaver i seksjon 6.2 . . . 294
6.3 L'Hôpitals regel og ubestemte uttrykk . . . 298
L'Hôpitals regel for «0/0»-uttrykk . . . 298
L'Hôpitals regel for «$\infty/\infty$»-uttrykk . . . 301
Andre ubestemte uttrykk . . . 302
Utfyllende eksempler . . . 304
Vekst av potenser, logaritmer og eksponentialfunksjoner . . . 306
Oppgaver i seksjon 6.3 . . . 307
6.4 Kurvedrøfting . . . 310
Konvekse og konkave funksjoner . . . 313
Oppgaver i seksjon 6.4 . . . 318
6.5 Asymptoter . . . 321
Vertikale asymptoter . . . 322
Skråasymptoter . . . 323
Oppgaver i seksjon 6.5 . . . 327
6.6 Historisk epistel: Grenser og infinitesimaler . . . 328

**7 Anvendelser og utvidelser 337**
7.1 Maksimums- og minimumsproblemer . . . 337
Oppgaver i seksjon 7.1 . . . 343
7.2 Koblede hastigheter . . . 348
Oppgaver i seksjon 7.2 . . . 353
7.3 Newtons metode . . . 356
*Betingelser for konvergens . . . 359
Oppgaver i seksjon 7.3 . . . 362
7.4 Omvendte funksjoner . . . 365
Oppgaver i seksjon 7.4 . . . 372
7.5 Cotangens . . . 373
Oppgaver i seksjon 7.5 . . . 374
7.6 Arcusfunksjonene . . . 376
Oppgaver i seksjon 7.6 . . . 379
*7.7 Hyperbolske og inverse hyperbolske funksjoner . . . 384
Inverse hyperbolske funksjoner . . . 386
Sammenhengen mellom trigonometriske og hyperbolske funksjoner 387
Oppgaver i seksjon 7.7 . . . 388
7.8 Historisk epistel: Naturens språk . . . 389

**8 Integrasjon 395**
8.1 Geometriske beregninger av areal og volum . . . 396

Oppgaver i seksjon 8.1 . . . 400
8.2 Definisjon av integralet . . . 403
Oppgaver i seksjon 8.2 . . . 409
8.3 Analysens fundamentalteorem . . . 412
Oppgaver i seksjon 8.3 . . . 421
8.4 Det ubestemte integralet . . . 427
Oppgaver i seksjon 8.4 . . . 430
8.5 Riemann-summer . . . 432
*Ekvivalens av Riemanns og Darboux' definisjoner . . . 435
Oppgaver i seksjon 8.5 . . . 438
8.6 Anvendelser av integralet . . . 439
Arealberegninger . . . 439
Omdreiningslegeme om $x$-aksen . . . 440
Omdreiningslegeme om $y$-aksen . . . 443
Buelengde . . . 447
Kraft og arbeid . . . 449
Oppgaver i seksjon 8.6 . . . 451
*8.7 Numerisk integrasjon . . . 459
Trapesmetoden . . . 459
Simpsons metode . . . 461
Feilestimater . . . 463
Oppgaver i seksjon 8.7 . . . 465
8.8 Historisk epistel: Fra arealberegning til integrasjon . . . 467

**9 Integrasjonsteknikk 477**
9.1 Delvis integrasjon . . . 478
Oppgaver i seksjon 9.1 . . . 482
9.2 Substitusjon . . . 485
Oppgaver i seksjon 9.2 . . . 491
9.3 Delbrøkoppspalting . . . 496
Oppgaver i seksjon 9.3 . . . 506
*9.4 Noen spesielle teknikker . . . 511
Oppgaver i seksjon 9.4 . . . 520
9.5 Uegentlige integraler . . . 523
Oppgaver i seksjon 9.5 . . . 534
9.6 Historisk epistel: Magellanske gjennomfarter . . . 537

**10 Differensialligninger 549**
10.1 Førsteordens, lineære differensialligninger . . . 550
Oppgaver i seksjon 10.1 . . . 553
10.2 Anvendelser . . . 555
Oppgaver i seksjon 10.2 . . . 561
10.3 Eksistens og entydighet . . . 567
Oppgaver i seksjon 10.3 . . . 571
10.4 Separable differensialligninger . . . 572
Oppgaver i seksjon 10.4 . . . 581
10.5 Annenordens, homogene ligninger med konstante koeffisienter . . . 589
Tilfelle 1: To reelle røtter . . . 590
Tilfelle 2: Én reell rot . . . 594

Tilfelle 3: To komplekse røtter . . . 596
Oppsummering . . . 599
Anvendelser . . . 600
Oppgaver i seksjon 10.5 . . . 603
10.6 Annenordens, inhomogene ligninger . . . 606
Ukjente koeffisienters metode . . . 607
*Variasjon av parametre . . . 611
Oppgaver i seksjon 10.6 . . . 615
*10.7 Svingninger og resonans . . . 617
Frie svingninger . . . 617
Ytre krefter og resonans . . . 620
Oppgaver i seksjon 10.7 . . . 625
*10.8 Numeriske løsninger . . . 626
Oppgaver i seksjon 10.8 . . . 634
10.9 Historisk epistel: Glimt fra differensialligningenes historie . . . 636

**11 Funksjonsfølger 645**
11.1 Taylor-polynomer . . . 645
Oppgaver i seksjon 11.1 . . . 652
11.2 Taylors formel med restledd . . . 652
Oppgaver i seksjon 11.2 . . . 660
11.3 Punktvis og uniform konvergens . . . 662
*Dinis teorem . . . 669
Oppgaver i seksjon 11.3 . . . 670
11.4 Integrasjon og derivasjon av funksjonsfølger . . . 672
*Konsekvenser av Dinis teorem . . . 674
*Derivasjon under integraltegnet . . . 676
Oppgaver i seksjon 11.4 . . . 679
11.5 Stirlings formel for $n!$ . . . 681
Oppgaver i seksjon 11.5 . . . 686
11.6 Historisk epistel: Et teorem med unntagelser . . . 687

**12 Rekker 689**
12.1 Konvergens av rekker . . . 689
Oppgaver i seksjon 12.1 . . . 695
12.2 Rekker med positive ledd . . . 698
Integraltesten . . . 699
Sammenligningstester . . . 702
Forholdstesten og rottesten . . . 705
Oppgaver i seksjon 12.2 . . . 707
12.3 Alternerende rekker . . . 714
Oppgaver i seksjon 12.3 . . . 715
12.4 Absolutt og betinget konvergens . . . 717
*Ombytte av ledd . . . 719
Oppgaver i seksjon 12.4 . . . 722
12.5 Rekker av funksjoner . . . 724
*En kontinuerlig, ingensteds deriverbar funksjon . . . 726
Oppgaver i seksjon 12.5 . . . 730
12.6 Konvergens av potensrekker . . . 732

*Bevis for Abels teorem . . . 738
Oppgaver i seksjon 12.6 . . . 740
12.7 Regning med potensrekker . . . 743
Integrasjon og derivasjon . . . 743
Multiplikasjon av rekker . . . 746
Oppgaver i seksjon 12.7 . . . 750
12.8 Taylor-rekker . . . 753
Oppgaver i seksjon 12.8 . . . 760
12.9 Potensrekker og differensialligninger . . . 766
Oppgaver i seksjon 12.9 . . . 768
12.10 Binomiske rekker . . . 771
Oppgaver i seksjon 12.10 . . . 775
12.11 Genererende funksjoner . . . 777
Oppgaver i seksjon 12.11 . . . 784
*12.12 En virrevandrer vender hjem . . . 787
Virrevandringer i to og tre dimensjoner . . . 794
Oppgaver i seksjon 12.12 . . . 795
12.13 Historisk epistel: Fra Madhava til Riemann . . . 797

**Fasit** **809**

**Stikkordregister** **833**

# Innledning: Å studere matematikk

> . . . for mathematical proofs, like diamonds, are hard as well as clear, and will be touched by nothing but strict reasoning.
>
> *— John Locke (1632–1704), Second Reply to the Bishop of Worcester*

Det er bare ett menneske som kan lære deg matematikk – og det er du! Andre kan hjelpe deg – de kan undervise deg, løse oppgaver sammen med deg eller skrive bøker du kan lese – men det er bare du som kan omforme det de forteller deg, til et redskap for *din* tanke. For det er det matematikk er; et redskap til å løse problemer og til å forstå verden.

Men matematikk er også noe mer. Det er en flere tusen år gammel tradisjon, en sammenhengende utviklingshistorie som tar opp i seg ideer og oppdagelser fra mange tider og alle verdenshjørner. Det er noe tidløst over matematiske oppdagelser – de over to tusen år gamle bevisene for Pythagoras' læresetning som vi finner i greske, indiske og kinesiske kilder, er like slående i dag som da de ble skrevet ned. Matematikk er et av menneskehetens kollektive mesterverk; en himmelstrebende katedral av tanker og symboler.

Denne boken legger vekt på begge aspektene. Først og fremst tar den sikte på å lære deg teknikker og metoder som du kan bruke til å løse problemer i matematikk og andre fag. Samtidig forsøker den å gi et inntrykk av hvor disse metodene og teknikkene kommer fra, hvordan de har utviklet seg, og hva de brukes til. Uten denne kunnskapen vil faget lett fremstå som en samling av elegante, men ubegripelige knep.

Hva handler så boken om? Tyngdepunktet er integral- og differensialregning, det som på engelsk kalles «calculus», og som vi ikke har hatt noen god betegnelse for. Boken bygger på full fordypning i matematikk fra videregående skole og forutsetter at du kjenner de grunnleggende funksjonene $x^a$, $a^x$, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, og at du kan derivere sammensetninger av disse. Det er også en stor fordel å ha vært borti enkel integrasjon og litt vektorregning i planet. Har du vært lenge borte fra faget, kan det være lurt å repetere litt først, og spesielt lønner det seg å regne en del oppgaver slik at du får formelapparatet inn i fingrene igjen.

## Undervisningsformer

Boken kan godt brukes til selvstudium, men de fleste vil få bedre utbytte av den om de følger undervisningen ved et universitet eller en høyskole. Studieopplegget varierer

fra sted til sted, men som regel vil undervisningen være delt i to – *forelesninger* der lærestoffet blir gjennomgått, og *regneøvelser* der oppgavene blir diskutert og løst.

I de senere år er det blitt populært å kritisere forelesninger som undervisningsform, men på sitt beste er de fortsatt en effektiv måte å formidle lærestoffet på. Men du må passe deg litt; du må ikke tro at du forstår stoffet bare fordi du er i stand til å følge med på forelesningene. Det er *oppgavene* som er testen på forståelsen. Får du dem til, kan du være rimelig sikker på at du har forstått stoffet; får du dem *ikke* til, kan du være helt sikker på at du ikke har forstått det. Én opplevelse har alle matematikkstudenter felles; å tro at de har forstått et kapittel, for så å oppdage at de ikke får til en eneste oppgave. Da er det bare en ting å gjøre – lese kapitlet en gang til med større konsentrasjon og et sideblikk til de oppgavene du ikke fikk til.

Forelesningene skal utfylle læreboken. Der boken er detaljrik og utflytende, skal forelesningene trekke opp de store linjene og skille mellom vesentlig og uvesentlig. Der boken er tynn og skissemessig, skal forelesningene utfylle og eksemplifisere. Men forelesningene skal også utfylle boken på en annen måte. Det talte og det skrevne ord har forskjellige kvaliteter; det er ting som det er lett å si og vanskelig å skrive – og omvendt. Muntlig kan man beskrive de store linjene og de grunnleggende ideene uten å fortape seg i ubehagelige detaljer; man kan bruke tonefall og mimikk til å signalisere hva som er vesentlig og hva som er mindre viktig, og man kan vise gjennom eksempler hvordan man selv tenker. Skriftlig kan man være grundigere og mer presis, ta med flere eksempler og knytte forbindelser fremover og bakover i teksten. En bok kan leses flere ganger, en forelesning hører man som regel bare en gang! Selv om mange institusjoner i dag legger ut forelesningsopptak på nettet, er det neppe en god idé å se dem om igjen flere ganger – forelesningene gir deg en innføring; dybdelæring får du gjennom å lese læreboken og gjøre oppgaver.

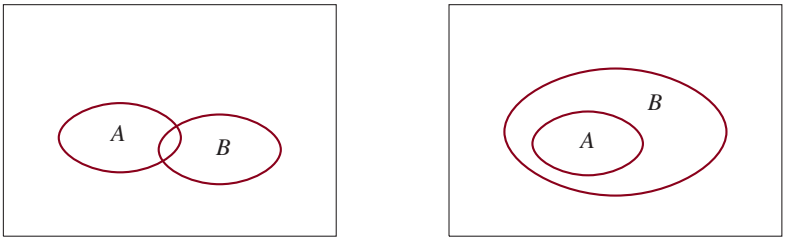
Et godt råd om samspillet mellom lærebok og forelesning: Les igjennom stoffet før du går på forelesning! De færreste av oss makter å holde konsentrasjonen på topp gjennom en hel forelesning, og har du lest lærestoffet på forhånd, vet du hvor vanskelighetene sitter og hvor du må konsentrere deg ekstra. Synes du det er tungt å lese, har mange institusjoner innføringsvideoer du kan se på før du går på forelesning. Rådet om å være forberedt gjelder i enda sterkere grad regneøvelsene; prøv deg alltid på oppgavene på forhånd! Ingen har lært matematikk ved å se på at andre løser oppgaver. Har du prøvd deg på en oppgave, vet du hvor vanskelighetene sitter og kan verdsette løsningen når du ser den – har du *ikke* prøvd deg, blir løsningen bare et regnestykke som alle andre.

Selv om det å lære matematikk til syvende og sist er ditt eget ansvar, kan du få uvurderlig hjelp av andre. Mange liker å lage arbeidsgrupper med 3–4 personer der man diskuterer teorien og løser oppgavene sammen. Bli ikke bekymret om du bruker mye tid på å forklare stoff du allerede har forstått – det er ingen ting som klargjør tankene så godt som å formidle til andre. Ofte vil du nok oppdage at du ikke hadde forstått tingene så godt som du trodde. Argumentet gjelder også den andre veien – føl ikke at du er en klamp om foten selv om de andre bruker mye tid på å forklare ting for deg; de lærer minst like mye av det som du! Men selv om du liker å arbeide i grupper, tror jeg det er lurt at du også arbeider en del alene. Innimellom må stoffet organiseres i hjernen, du må få oversikt over de store linjene og de små detaljene, og du må sette dem sammen til et system som passer for deg. Da trenger du å tenke litt i fred og ro uten at andre hele tiden kommer med innspill, og uten at du må forholde deg til andres måter å tenke på.

## Matematikkens språk

Alle fag har sin fagterminologi. Av og til kan det se jålete og unødvendig ut, men i de fleste tilfeller er det påkrevd – vitenskap krever større presisjon og finere distinksjoner enn dagliglivet. Kravet til presisjon er spesielt stort i matematikk på grunn av fagets logiske oppbygning, og i denne boken vil du finne en mengde definisjoner av nye ord og begreper. Av og til vil du nok synes at en definisjon er altfor komplisert, og at det samme kunne vært sagt på en enklere måte. Det kan selvfølgelig tenkes at forfatteren har sovet, men som regel er det en grunn til komplikasjonene; man ønsker å dekke alle muligheter og utelukke enhver feiltolkning. Synes du at en definisjon eller en setning er unødvendig kronglete, er det ikke usannsynlig at den sier noe annet enn det du tror.

I tillegg til nye begreper vil du i en matematikkbok finne logiske uttrykksmåter med et litt annet innhold enn i dagligtalen. Utsagn av typen «Hvis $A$, så $B$» er spesielt vanlig i matematikken. Ser du nøyere etter, vil du oppdage at det i dagligtalen finnes ulike slags påstander med denne formen, blant annet hypotetiske utsagn av typen «Hvis jeg var født i steinbukkens tegn, så ville jeg aldri ha strøket i R2». Det er ikke lett å avgjøre hva denne påstanden egentlig betyr, og slett ikke om den er sann eller gal (hvis den da er noen av delene). De «Hvis $A$, så $B$»-utsagnene vi møter i matematikken, er av en annen type – de handler om påstander $A$ og $B$ som kan være sanne eller usanne etter omstendighetene, og de påstår at hver gang $A$ er sann, så vil $B$ også være det. Et eksempel er: «Hvis $n$ er delelig med 14, så er $n$ delelig med 7» – et utsagn som opplagt er sant siden ethvert tall som er delelig med 14 også er delelig med 7. Andre del av figur 1 illustrerer sammenhengen symbolsk – mengden $A$ illustrerer de tilfellene der $A$ er sann, mengden $B$ illustrerer de tilfellene der $B$ er sann, og $A$ er inneholdt i $B$. Hver gang vi er i en situasjon der $A$ er sann, vil derfor $B$ også være sann. Første del av figuren viser den generelle situasjonen hvor det finnes noen tilfeller der bare $A$ er sann, noen der bare $B$ er sann, noen der begge påstandene er sanne, og noen der ingen av dem er det.




Generell situasjon $A \Rightarrow B$

Figur 1

Istedenfor «Hvis $A$, så $B$» sier vi også «$A$ medfører $B$» og «$A$ impliserer $B$». Med symboler skriver vi $A \Rightarrow B$, der symbolet $\Rightarrow$ kalles en *implikasjonspil*.

Legg merke til at $A \Rightarrow B$ og $B \Rightarrow A$ betyr to forskjellige ting. Påstanden $A \Rightarrow B$ betyr at hver gang $A$ er sann, så er $B$ det også, mens påstanden $B \Rightarrow A$ betyr at hver gang $B$ er sann, så er $A$ det også. Dette er vanligvis to forskjellige ting: Hvis $A$ er påstanden «$n$ er delelig med 14» og $B$ er påstanden «$n$ er delelig med 7», så er $A \Rightarrow B$ sann, mens $B \Rightarrow A$ er usann (fordi et tall godt kan være delelig med 7 uten å være delelig med 14).

Dersom både $A \Rightarrow B$ og $B \Rightarrow A$ gjelder, er $A$ og $B$ sanne i nøyaktig de samme tilfellene. I så fall sier vi at $A$ og $B$ er *ekvivalente*, og skriver $A \Leftrightarrow B$ (symbolet $\Leftrightarrow$ kalles en *ekvivalenspil*). Vi uttrykker dette også ved å si «$A$ hvis og bare hvis $B$». Denne uttrykksmåten er verd å merke seg siden vi skal bruke den mye og den ikke finnes i dagligtalen. Et eksempel er: «En trekant er likebeint hvis og bare hvis to av vinklene er like store».

Det kan være lurt å si noen få ord også om en annen del av matematisk språkbruk. Gjennom hele boken vil du støte på ordene «teorem», «setning», «lemma» og «korollar». Dette er ulike betegnelser på matematiske læresetninger. Logisk sett er det selvfølgelig unødvendig å ha mer enn én betegnelse, men det er valørforskjeller i bruken som ofte kan være til hjelp når du skal orientere deg i teksten. Et *teorem* er et hovedresultat; en sentral læresetning som vil bli brukt om og om igjen. En *setning* er et resultat som godt kan stå på egne bein, men som ikke er så sentral som et teorem. Et *lemma* er en hjelpesetning; et resultat uten egeninteresse, men en nyttig hjelp på veien mot noe større. Et *korollar* er en følgesetning; en umiddelbar konsekvens av et teorem eller en setning vi allerede har bevist. Selvfølgelig er det ikke vanntette skott mellom de forskjellige typene, og det er ofte en smakssak om vi kaller noe et teorem eller en setning. Senere i boken vil du for eksempel støte på skjæringssetningen og middelverdisetningen – to resultater som etter klassifikasjonen ovenfor opplagt burde vært teoremer.

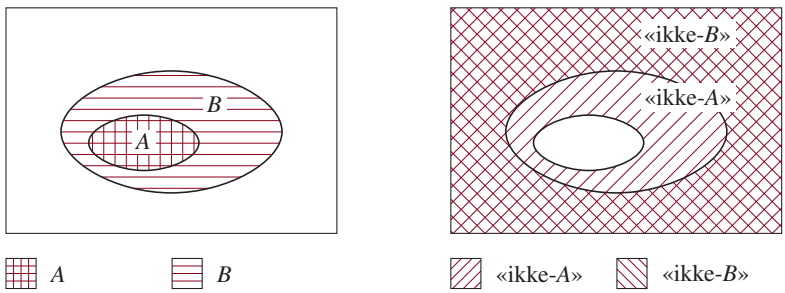
## Matematiske resonnementer

Som alle andre fag har matematikk sine egne metoder og teknikker. Ett av særpregene er kravet om fullstendige bevis. En matematisk påstand blir ikke godtatt før den er bevist. Det er ikke nok å argumentere med at ingen har vært i stand til å pønske ut et moteksempel; vi må vise at moteksempler ikke finnes. At matematiske resultater er beviselig sanne, gir faget en enestående stilling som redskapsfag; fysikere, kjemikere, ingeniører og økonomer som bruker matematikk som verktøy, er garantert at redskapen holder mål.

De fleste studenter er villige til å godta at matematiske påstander bør bevises, men de er ikke fullt så villige til å godta at de selv må lese bevisene – de tar da så gjerne foreleserens ord for hva som er sant! Da har de mistet et poeng; matematiske bevis forteller oss ikke bare *at* noe er sant, men også *hvorfor* det er sant. Forstår du ikke hvorfor resultatene er riktige, blir faget et usammenhengende oppsop av løsrevne påstander. Vi er ikke laget for å huske og nyttegjøre oss slike løsrevne fakta; hjernen vår organiserer kunnskapen i meningsbærende strukturer – historier, ideer, resonnementer. Bare en hukommelseskunstner er i stand til å huske alle resultatene i denne boken uten å forstå dem, men setter du deg inn i bevisene, vil du se at det bare er noen få ideer du egentlig behøver å huske; alt det andre kan rekonstrueres fra disse ideene. Selv om du skulle ha greid deg gjennom skolen ved å huske istedenfor å forstå, er tiden nå inne for å legge om arbeidsvanene; på universitetetsnivå blir fagstoffet for omfattende og krevende til at du kan stole på hukommelsen alene.

Det får være en trøst at bevis ikke er så mystiske og skremmende som mange tror – i utgangspunktet er det ikke noe annet enn sunn fornuft satt i system. Alt man trenger er en kjede av logiske slutninger fra noe man allerede vet til det man ønsker å vise. Hvert enkelt trinn i kjeden skal være så enkelt at enhver kan overbevise seg om at det er riktig.

Selv om bevis ikke er noe rart og vanskelig, er det to bevisteknikker som kan virke litt forvirrende, og som det er lurt å være klar over på forhånd: kontrapositive bevis og motsigelsesbevis. Anta først at vi skal vise at $A$ medfører $B$. Da kan vi like godt vise at «ikke-$B$» medfører «ikke-$A$». Dette er lett å forstå hvis du tegner opp $A$ og $B$ i et diagram som i figur 2; at $A$ medfører $B$, betyr at mengden $A$ ligger inni mengden $B$, som er det samme som at mengden «ikke-$B$» ligger inni «ikke-$A$». Denne observasjonen er nyttig fordi det av og til er lettere å anta «ikke-$B$» og vise «ikke-$A$» enn å gå fra $A$ til $B$. Bevis av denne typen kalles *kontrapositive bevis*.




Figur 2

La oss se på et eksempel på hvordan denne teknikken brukes i praksis. I kapittel 2 kommer du til å få bruk for denne observasjonen:

**Setning:** *Anta at $n$ er et naturlig tall. Hvis $n^2$ er et partall, så er $n$ også et partall.*

***Bevis:*** Det er er ikke så lett å utnytte direkte at $n^2$ er et partall, så vi ser på det kontrapositive utsagnet isteden. Det sier at hvis $n$ *ikke* er et partall, så er $n^2$ *ikke* et partall – med andre ord at hvis $n$ er et oddetall, så er $n^2$ et oddetall. Den nye hypotesen er altså at $n$ er et oddetall, og den er det lett å utnytte siden den betyr at $n = 2k + 1$ for et helt tall $k$. Dermed er

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

som viser at $n^2$ er et oddetall. Dermed har vi bevist det kontrapositive utsagnet til setningen, og dermed setningen selv. ■

Den andre nyttige bevisteknikken vi skal se litt på, er *bevis ved motsigelse*. Anta at vi ønsker å vise at en påstand $A$ er sann. Vi antar da at $A$ er usann, og viser at dette fører til en umulighet – til en selvmotsigelse. Eneste mulige konklusjon er at $A$ må være sann. Denne teknikken er ofte effektiv fordi den gir oss en ekstra hypotese å arbeide med; i tillegg til det vi vet fra før, får vi også antagelsen om at $A$ er gal.

La oss se på et eksempel på motsigelsesbevis. I kapittel 2 skal vi studere rasjonale og irrasjonale tall. De *rasjonale tallene* er de som kan skrives som en brøk $\frac{a}{b}$ der $a$ og $b$ er hele tall, mens resten kalles *irrasjonale*. Vi skal bruke et motsigelsesbevis til å vise dette resultatet som du kanskje har sett før:

**Setning:** $\sqrt{2}$ *er et irrasjonalt tall.*

***Bevis:*** For å få frem en motsigelse antar vi at $\sqrt{2}$ er rasjonal. Da kan vi skrive $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ der $a$ og $b$ er naturlige tall, og vi kan anta at brøken $\frac{a}{b}$ er forkortet så mye som mulig slik at $a$ og $b$ ikke har felles faktorer. Kvadrerer vi uttrykket $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, får vi $2 = \frac{a^2}{b^2}$ som kan omformes til $2b^2 = a^2$. Dette viser at $a^2$ er et partall, og ifølge setningen ovenfor må da $a$ være et partall. Følgelig er $a = 2k$ for et naturlig tall $k$, og setter vi dette inn i likheten $2b^2 = a^2$, får vi $2b^2 = 4k^2$. Forkorter vi med 2, får vi $b^2 = 2k^2$ som viser at $b^2$ er et partall, og ifølge setningen ovenfor betyr dette at $b$ er et partall. Men dette er en selvmotsigelse – vi startet med to tall $a$ og $b$ som ikke hadde felles faktorer, og har nå funnet ut at de begge må være delelige med 2. Siden det ikke er noe galt med resten av resonnementet, må denne motsigelsen komme fra antagelsen om at $\sqrt{2}$ er rasjonal, og følgelig er $\sqrt{2}$ irrasjonal. ■

Legg merke til hvordan beviset for den andre setningen bygger på den første. Dette er typisk for matematikk; vi bygger en teori ved å bruke gamle resultater til å bevise nye.

Er du fortsatt usikker på hva et bevis egentlig er, kan du lære det ved å studere bevisene i boken nøye. Et knep som fungerer for noen, er først å lese bevisene grundig, og så legge et papirark over for å se om du kan gjennomføre dem på egen hånd ved neste gangs gjennomlesning. Du oppdager fort at det ikke lønner seg å pugge detaljene utenat; du må gripe fatt i en idé og bruke den til å rekonstruere resten av beviset.

Matematisk teori er ikke teori for teoriens egen skyld. Hensikten er å utvikle metoder og innsikt som kan brukes til å løse problemer. Problemløsing er matematikkens kjerne, og det er de uløste problemene som driver faget videre, både de problemene som oppstår i matematikken selv, og de som kommer fra det praktiske liv og andre fag. Skal du ha nytte av din matematikkutdanning, må du lære deg å løse problemer. Først og fremst gjør du dette ved å løse oppgaver – ved å starte med de enkleste og langsomt gå over til de vanskeligere. Det finnes også bøker som kan hjelpe deg til å utvikle problemløsingsstrategier. Klassikeren på dette området er George Polyas bok *How to Solve It* som anbefales på det varmeste (det er lett å få tak i en billig pocketutgave). Dersom du har lyst til å prøve deg som problemløser på egen hånd, kan du se på oppgavene til slutt i denne innledningen. De kan løses uten avansert matematikk, men de krever en idé (ikke bli deprimert om du ikke får til alle, noen av dem er ganske vanskelige!)

## Hvordan boken er bygd opp

Boken består av tolv kapitler som igjen er delt inn i seksjoner. Seksjon 3.2 er således den andre seksjonen i kapittel 3. Der det er naturlig, er seksjonene delt opp i unummererte underavsnitt med egne overskrifter.

Bokens form er litt forskjellig fra det du er vant til – den ligner med hensikt på de matematikkbøkene du finner i mer avanserte kurs. Definisjoner, eksempler, teoremer og andre resultater er nummerert slik at det skal være lett å finne frem til dem. I seksjon 4.1 finner du for eksempel setning 4.1.1, eksempel 4.1.2, lemma 4.1.3, lemma 4.1.4, og så videre. Det kan virke ulogisk å bruke samme nummerering på eksempler, lemmaer og setninger, men erfaringen viser at det blir lettest å finne frem på denne måten. Definisjoner og resultater er rammet inn så de skal være lette å se, men eksemplene er ofte så lange at en ramme bare ville virke forstyrrende. Symbolene ■ og ■ markerer slutten på henholdsvis et bevis og et eksempel.

Noen seksjoner og avsnitt (og noen få bevis) er merket med *. Det betyr at du godt kan hoppe over dem uten å få problemer senere. Mange av de *-merkede avsnittene er vanskelige og ment for de spesielt nysgjerrige og interesserte (for eksempel *4.4, *5.5, 11.5 og *12.12), mens andre (slik som *8.7, *10.8 og 12.11) ligger litt i utkanten av pensum når det gjelder metoder og teknikker. Stort sett dukker ikke stoff fra de *-merkede delene opp andre steder, men seksjon *7.7 er et unntak. De funksjonene som innføres i dette avsnittet ($\sinh$, $\cosh$, $\tanh$, $\coth$ og deres inverser), opptrer i en del oppgaver gjennom hele resten av boken, men det er alltid lett å se hvilke oppgaver dette er.

Til slutt i seksjonene finner du oppgavene. Stort sett er de ordnet etter stigende vanskelighetsgrad, men av og til har det vært mer naturlig å samle dem etter tema. Bakerst i boken er det en fasit med svar på oppgaver med oddetallsnummer (pluss noen få til). Det er altså ikke fasit til alle oppgavene, og det skyldes ikke bare at forfatteren er doven. Til eksamen og i arbeidslivet finnes det ingen fasit, og for din egen skyld bør du lære å kontrollere deg selv allerede nå! For det går faktisk an å kontrollere svaret selv om du ikke har fasit. Er oppgaven en ligning, kan du sette prøve; er oppgaven et ubestemt integral, kan du derivere svaret; er oppgaven et bestemt integral, kan du bruke et dataprogram eller en lommeregner til å regne ut en tilnærmet verdi osv. Det finnes også nettsider du kan bruke for å få eksakte svar, f.eks. Wolfram Alpha.

Det er også viktig å bruke fasiten riktig. Mange regner oppgavene tre eller fire ganger inntil de får riktig svar, og raser så lykkelige videre til neste oppgave. Ta deg tid til å stoppe opp og tenke over hvorfor svaret ble riktig den siste gangen, men ikke de første. Noen ganger skyldes det selvfølgelig at du har slurvet, men andre ganger har du skiftet metode for å få riktig svar. Overbevis deg om at du skjønner hvorfor den siste metoden er riktig og den første gal, før du går videre. Du lærer atskillig mer av dette enn av å rase tanketomt gjennom to oppgaver til.

I slutten av hvert kapittel kommer en seksjon som skiller seg fra de andre, en «historisk epistel» som forsøker å sette fagstoffet inn i en videre ramme. Forhåpentligvis vil disse seksjonene hjelpe deg til å få et mer fullstendig bilde av matematikk som fag; både av den lange utviklingsprosessen, den faglige entusiasmen og de mangfoldige anvendelsene. I slutten av hvert kapittel finner du også en liste med litteraturhenvisninger. Det er mye spennende å lese om matematikk som ikke står i pensumbøkene! Husk at akademiske institusjoner har gode biblioteker, og at det kan være mye fint å finne i hyllene på ditt lærested.

Som allerede nevnt avslutter vi denne innledningen med noen problemløsningsoppgaver. Selv om de ikke krever avansert matematikk, er noen av dem ganske vanskelige.

## Oppgaver til innledningen

**1.** Du har to kopper, en med kaffe og en med te. Først tar du en full teskje fra kaffekoppen over i tekoppen og rører godt rundt. Så tar du en full teskje av blandingen tilbake i kaffekoppen. Er det nå mest kaffe i tekoppen eller mest te i kaffekoppen?

**2.** En trollmann har tre lærlinger. En dag kommer han inn i klasserommet med fem hatter, to svarte og tre hvite. Han ber lærlingene lukke øynene, plasserer én hatt på hvert hode, og skjuler de to siste. Lærlingene sitter på én rekke, og når de åpner øynene, kan de se hattene til dem som sitter foran, men de kan ikke se sin egen hatt eller hattene til dem som sitter bak. Trollmannen spør den bakerste lærlingen: «Vet du far-

gen på hatten din?» Lærlingen svarer nei. Så spør trollmannen den midterste lærlingen og får samme svar. Da smiler den fremste lærlingen og sier. «Men jeg vet fargen på min hatt!» Hvilken farge hadde hatten hennes?

**3.** Du har et sjakkbrett (8 ganger 8 ruter) og et sett med dominobrikker som er dobbelt så lange som de er brede. Hver dominobrikke dekker nøyaktig to av rutene på sjakkbrettet. Det er lett å se at vi kan dekke sjakkbrettet med 32 dominobrikker. Vi klipper nå bort ruten nederst til venstre og ruten øverst til høyre på sjakkbrettet. Kan vi dekke det nye brettet ved hjelp av 31 dominobrikker?

**4.** Til en stor internetturnering i sjakk har det meldt seg $42\,135$ deltagere. Turneringen spilles etter utslagsmetoden. I første runde spilles det $21\,067$ matcher der vinneren i hver match går videre til neste runde sammen med den deltageren som ikke har fått noen motstander (walk over). I neste runde avvikles det $10\,534$ matcher der vinnerne går videre til 3. runde osv. Turneringen fortsetter på samme måte (sett opp så mange matcher som mulig og la eventuelt sistemann få walk over) til vinneren er kåret. Hvor mange matcher blir spilt? (Du kan selvfølgelig løse denne oppgaven ved opptellingen, men finnes det en raskere metode som også vil gi deg svaret dersom antall deltagere er et generelt tall $N$?)

**5.** Tre ektepar er på tur. De kommer til en elv som de bare kan krysse ved å bruke en liten båt som ikke tar mer enn to personer. Problemet er at alle ektemennene er så sjalu at de ikke vil la sin kone være i selskap med andre menn uten at de selv er til stede. Er det likevel mulig for alle å krysse elven?

**6.** Et selskap består av 5 ektepar. Noen av gjestene håndhilser på hverandre, andre gjør det ikke. En av gjestene blir nysgjerrig og spør alle de andre deltagerne hvor mange de har håndhilst på. Han får bare forskjellige svar. Hva svarte hans kone? (Du kan anta at alle oppgir riktig antall, og at ingen har håndhilst på sin egen ektefelle).

**7.** Et selskap består av 6 gjester. Vis at uansett hvordan selskapet er satt sammen, kan vi alltid finne en gruppe av tre gjester der enten alle kjenner hverandre eller ingen kjenner hverandre.

# 1 Naturlige tall

De naturlige tallene har Vårherre
skapt, alt annet er menneskeverk.
*— Leopold Kronecker (1823–91)*

I dette og de to neste kapitlene skal vi se litt på ulike tallsystemer – først naturlige tall, så reelle tall og til slutt komplekse tall. Mye av dette stoffet vil være nytt for de fleste, men noe kan nok være kjent fra før. Det kan være lurt å lese grundig igjennom de kjente delene også, slik at vi kan bli enige om en felles språkbruk og notasjon. Har du ikke gjort det allerede, er det også en god idé å lese gjennom innledningen om hvordan man studerer matematikk før du fortsetter. I tillegg til nyttige tips studietips gir den viktig informasjon om hvordan boken er bygd opp og hvordan stoffet presenteres.

## 1.1 Grunnleggende egenskaper

De tallene vi bruker når vi teller

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$$

kalles de *naturlige tallene*. Mengden av alle naturlige tall betegner vi med $\mathbb{N}$; altså

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}.$$

Tar vi også med 0 og negative tall, får vi mengden $\mathbb{Z}$ av *hele tall:*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

De naturlige tallene har vært kjent i alle større kulturer i tusenvis av år, og de er en av grunnstenene som all matematikk er bygd på. Vi skal ofte bruke notasjon av typen $n \in \mathbb{N}$ og $n \in \mathbb{Z}$ for å uttrykke at $n$ er henholdvis et naturlig og et helt tall.

En av de viktigste egenskapene ved naturlige tall er delelighet. Forsøker vi å dele ett naturlig tall $a$ med et annet $b$, så vil i noen tilfeller divisjonen «gå opp», og vi får et helt tall $q$ til svar. I andre tilfeller går divisjonen ikke opp, og vi må nøye oss med et svar som er en brøk eller et desimaltall. Når divisjonen «går opp», sier vi at $a$ er delelig med $b$. Uttrykt på en annen måte; $a$ er *delelig* med $b$ dersom det finnes et helt tall $q$ slik at $a = qb$. For eksempel er 12 delelig med 3 siden $12 = 4 \cdot 3$, men 13 er ikke delelig med 3 siden det ikke finnes noe helt tall $q$ slik at $13 = q \cdot 3$. Dersom $a$ er delelig med $b$, sier vi også at $b$ *deler* $a$.

De tallene som ikke er delelige med noe annet tall, kalles primtall. Mer presist sier vi at et naturlig tall $p$ er et *primtall* dersom $p \geq 2$ og de eneste naturlige tallene som deler $p$, er 1 og $p$ selv. (Legg merke til at vi ikke regner 1 som primtall.) De minste primtallene er

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ \ldots$$

På skolen har vi lært å faktorisere naturlige tall som produkter av primtall – for eksempel finner vi lett ut at

$$882 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7.$$

Slike faktoriseringer er nyttige i praktisk regning når vi skal finne fellesnevnere til store brøkuttrykk, men de er enda viktigere i teoretiske betraktninger om de hele talls natur. Vi skal ikke komme så mye inn på dette temaet i boken, men det vil likevel være nyttig for oss å ha det grunnleggende faktoriseringsresultatet skrevet opp helt presist.

### 1.1.1 Aritmetikkens fundamentalteorem

Et hvilket som helst naturlig tall $a > 1$ kan skrives som et produkt av primtall:

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$$

Denne faktoriseringen er entydig i den forstand at dersom

$$a = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$$

er en annen fremstilling av $a$ som et produkt av primtall, så er $n = m$, og faktorene $q_1, q_2, \ldots, q_m$ er de samme som $p_1, p_2, \ldots, p_n$, bortsett fra at rekkefølgen kan være en annen.

Legg merke til at dersom $a$ er et primtall, så vil det bare være ett tall i produktet på høyresiden ovenfor, nemlig $a$ selv. Vi godtar altså produkter med bare én faktor.

Siden aritmetikkens fundamentalteorem ikke vil spille noen sentral rolle i vår teori, skal vi ikke bevise det her, men regne den praktiske bruken som kjent fra skolematematikken. (Du kan selv bevise det ved å gjøre oppgave 14 og 15 til slutt i seksjonen, men spesielt oppgave 15 er ganske vanskelig.)

To viktige klasser av naturlige tall er partallene og oddetallene. *Partallene* er rett og slett de tallene som er delelige med 2, det vil si

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \ldots$$

mens *oddetallene* er de som ikke er delelige med 2,

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \ldots$$

Partallene kalles også *like* tall og oddetallene *ulike* tall. Legg merke til at ethvert partall kan skrives på formen $2n$ der $n \in \mathbb{N}$, mens ethvert oddetall kan skrives som $2n - 1$ for et naturlig tall $n$.

## Summetegn

Vi skal avslutte denne seksjonen med en kort omtale av summetegnet. Dette er et redskap som ikke har mye med naturlige tall å gjøre, men som vil være så sentralt og nyttig i alle deler av boken, at det kan være greit å få det innført med en gang.

Vi får ofte bruk for å summere lange uttrykk der alle leddene har samme form, f. eks.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots + 10^2,$$

der alle leddene er på formen $n^2$ for et eller annet naturlig tall $n$, eller

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 43,$$

der hvert ledd er et oddetall, og derfor på formen $2n - 1$. Det blir fort tungvint og uoversiktlig å dra rundt på slike lange remser i beregningene våre, og vi trenger derfor en kortere og mer oversiktlig notasjon. Til dette bruker vi *summetegnet* $\sum$ (egentlig er $\sum$ den greske bokstaven sigma).

La oss først se hvordan vi ville bruke summetegnet i det første eksemplet ovenfor. Det vi ønsker å summere er alle tall på formen $n^2$, der $n$ går fra 1 til 10. Ved hjelp av summetegnet skriver vi dette som

$$\sum_{n=1}^{10} n^2$$

og leser det som «summen av $n^2$ når $n$ går fra 1 til 10». Vi har altså

$$\sum_{n=1}^{10} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2.$$

Tilsvarende kan vi gå fram i det andre eksemplet vårt. I summen $1+3+5+7+\cdots+43$ inngår alle oddetallene $2n - 1$ fra $n = 1$ til $n = 22$. Vi skriver derfor

$$\sum_{n=1}^{22} (2n - 1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 43.$$

Det skulle nå være klart hva det generelle mønsteret er; dersom vi for hvert helt tall $n$ har et uttrykk $a_n$, så betyr rett og slett

$$\sum_{n=k}^{m} a_n$$

(der $k \leq m$) summen av alle disse uttrykkene fra og med $a_k$ og til og med $a_m$ – det vil si

$$\sum_{n=k}^{m} a_n = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{m-1} + a_m.$$

I dette uttrykket kaller vi $n$ for *summasjonsindeksen* og $k$ og $m$ for *nedre* og *øvre summasjonsgrense*. Vi kan naturligvis godt bruke en annen bokstav som summasjonsindeks uten å forandre verdien på uttrykket, for eksempel kan vi skrive

$$\sum_{i=k}^{m} a_i = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{m-1} + a_m.$$

La oss se på noen eksempler.

### 1.1.2 Eksempel

Skriv summen $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{17}$ ved hjelp av summetegnet.

Siden leddene er på formen $x^n$, der $n$ løper fra $n = 0$ (husk at $x^0 = 1$) til $n = 17$, får vi

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{17} = \sum_{n=0}^{17} x^n.$$

(Noen vil kanskje innvende at vi jukset litt da vi skrev $x^0$ istedenfor 1. Riktignok er $x^0 = 1$ når $x \neq 0$, men $0^0$ er ikke definert. Når vi arbeider med summetegn, er det imidlertid vanlig å overse denne lille nyansen og alltid tolke $0^0$ som 1.) ■

### 1.1.3 Eksempel

Skriv summen $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{17}$ ved hjelp av summetegnet.

Dette er akkurat det samme eksemplet som ovenfor, bortsett fra at fortegnet til leddene nå skifter mellom pluss og minus. Et nyttig triks i slike tilfeller er å utnytte at uttrykket $(-1)^n$ skifter mellom $+1$ og $-1$ etter som $n$ er like eller odde. Bruker vi dette, ser vi at

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{17} = \sum_{n=0}^{17} (-1)^n x^n.$$

(Skriv ut noen ledd av summen til høyre og overbevis deg om at dette virkelig stemmer.) ■

### 1.1.4 Eksempel

Skriv summen

$$\sum_{n=2}^{5} \ln(2n+1)$$

uten å bruke summetegn.

Alt vi behøver å gjøre, er å sette $n = 2, 3, 4, 5$ inn i uttrykket $\ln(2n + 1)$ og så summere resultatene. Vi får

$$\sum_{n=2}^{5} \ln(2n+1) = \ln 5 + \ln 7 + \ln 9 + \ln 11.$$

■

Det er tre regneregler for summetegn som det kan være nyttig å kjenne til. Den første sier at vi kan slå sammen to summer som har de samme summasjonsgrensene:

$$\sum_{n=k}^{m} a_n + \sum_{n=k}^{m} b_n = \sum_{n=k}^{m} (a_n + b_n). \tag{1}$$

Den andre sier at vi kan sette en felles faktor utenfor summetegnet:

$$\sum_{n=k}^{m} ca_n = c \sum_{n=k}^{m} a_n. \tag{2}$$

Den tredje forteller oss hvordan vi kan slå sammen to deler av den samme summen:

$$\sum_{n=k}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{l} a_n = \sum_{n=k}^{l} a_n. \tag{3}$$

Det er lett å sjekke at disse reglene holder ved rett og slett å skrive ut hva de betyr. La oss ta den første som et eksempel: Venstresiden av uttrykket er

$$\sum_{n=k}^{m} a_n + \sum_{n=k}^{m} b_n = (a_k + a_{k+1} + \cdots + a_m) + (b_k + b_{k+1} + \cdots + b_m)$$

og høyresiden er

$$\sum_{n=k}^{m} (a_n + b_n) = (a_k + b_k) + (a_{k+1} + b_{k+1}) + \cdots + (a_m + b_m).$$

Det er klart at disse to uttrykkene må være like siden de inneholder nøyaktig de samme leddene. De to andre formlene kan sjekkes på tilsvarende måte.

Det er også viktig å være klar over at to summer som ser forskjellige ut, kan være like. For eksempel er uttrykkene

$$\sum_{k=-3}^{11} (-1)^k x^{k+3} \qquad \text{og} \qquad \sum_{k=0}^{14} (-1)^{k+1} x^k \tag{4}$$

like siden de begge beskriver summen

$$-1 + x - x^2 + x^3 + \cdots - x^{14}.$$

For å oppdage slike likheter uten å skrive ut summene, er det ofte nyttig å «bytte summasjonsindeks». I (4) kan vi tenke oss at vi starter med summen

$$\sum_{k=-3}^{11} (-1)^k x^{k+3}.$$

Vi erstatter så summasjonsindeksen $k$ i dette uttrykket med den nye summasjonsindeksen $i = k+3$. Siden $k$ løper fra $-3$ til 11, må $i$ løpe fra 0 (som tilsvarer $k = -3$) til 14 (som tilsvarer $k = 11$). Erstatter vi $k$ med $i-3$ i formelen ovenfor, får vi dermed

$$\sum_{i=0}^{14} (-1)^{i-3} x^i.$$

Bruker vi så at $(-1)^{i+1} = (-1)^4(-1)^{i-3} = (-1)^{i-3}$, blir dette uttrykket til

$$\sum_{i=0}^{14} (-1)^{i+1} x^i.$$

Om vi ønsker, kan vi til slutt bytte navn på summasjonsindeksen og kalle den $k$ istedenfor $i$, slik at vi får

$$\sum_{k=0}^{14} (-1)^{k+1} x^k.$$

Dermed har vi vist at den høyre og den venstre siden i (4) er like.

Slike regninger ser kanskje litt kompliserte ut til å begynne med fordi det er mange ting å passe på underveis, men med litt trening går de greit. Det er lurt å skaffe seg denne treningen allerede nå ved å regne gjennom oppgavene nedenfor – manipulasjoner med summetegn vil nemlig dukke opp i mange viktige sammenhenger senere i denne boken.

## Oppgaver i seksjon 1.1

**1.** Skriv tallene som produkter av primtall:

a) $2442$

b) $3600$

c) $17\,017$

d) $513$

e) $773$

**2.** Forklar hvordan du kan bruke aritmetikkens fundamentalteorem til å vise at $11 \cdot 17 \cdot 19 \neq 81 \cdot 43$ uten å regne ut.

**3.** Skriv summene uten summetegn og regn ut verdiene

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{6} 2^n$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (3k-2)$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{5} \frac{2}{n+1}$

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \Big( \sum_{j=1}^{3} 2^{i+j} \Big)$

**4.** Er disse likhetene riktige?

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} 2^i = 15$

b) $\displaystyle\sum_{i=2}^{7} (2i-1) = \sum_{i=1}^{6} (2i+1)$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{4} a^n b^{3-n} = \sum_{m=-1}^{3} a^{3-m} b^m$

**5.** Skriv summene ved hjelp av summetegn

a) $1+2+3+4+5$

b) $5+7+9+11+13$

c) $4+8+12+16+\cdots+64$

d) $1+2+4+8+16+\cdots+128$

e) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-\frac{1}{243}$

**6.** Fyll inn boksene:

a) $\sum_{k=0}^{8}(2k+3)=\sum_{n=1}^{9}$ $\square$

b) $\sum_{n=-2}^{4}(n+2)3^n=\sum_{k=0}^{6}$ $\square$

c) $\sum_{n=0}^{10}x^n y^{1-n}=\sum_{n=1}^{11}$ $\square$

**7.** Sett på summasjonsgrenser:

a) $\sum_{n=1}^{6}(n-1)a^n=\sum ma^{m+1}$

b) $\sum_{n=0}^{3}x^{3-n}=\sum x^m$

c) $\sum_{k=19}^{24}a^k=\sum a^{k-1}$

d) $\sum_{n=0}^{20}3^{n+4}=\sum 81\cdot 3^n$

**8.** Gjør uttrykkene enklere ved å bytte summasjonsgrenser:

a) $\sum_{n=-3}^{7}(n+3)a^{n+3}$

b) $\sum_{n=0}^{18}9\cdot 3^n$

c) $\sum_{n=1}^{11}\frac{1}{2n+2}$

**9.** Vis at formlene (2) og (3) i teksten er sanne.

**10.** I denne oppgaven er $n$ et fast, naturlig tall. Dersom $a, b \in \mathbb{Z}$ skriver vi $a \equiv b$ hvis $a - b$ er delelig med $n$.

a) Vis at hvis $a \equiv b$ og $b \equiv c$, så er $a \equiv c$.

b) Vis at hvis $a \equiv b$ og $c \equiv d$, så er $a + c \equiv b + d$ og $ac \equiv bd$.

c) Vis at $a \equiv b$ hvis og bare hvis $a$ og $b$ gir samme rest når de deles med $n$.

**11.** Anta at $p$ er et primtall og at $a, b \in \mathbb{N}$. Vis at dersom $p$ går opp i produktet $ab$, så går $p$ opp i minst ett av tallene $a$ og $b$. (*Hint:* Bruk aritmetikkens fundamentalteorem.)

**12.** Vis at det finnes uendelig mange primtall. (*Hint:* Anta at det bare finnes endelig mange primtall $2, 3, 5, \ldots, P$, og betrakt tallet $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot P + 1$.)

**13.** Marit sier til sin nye venninne: «Jeg har tre barn, og hvis du ganger sammen aldrene deres får du 36.» «Og hvis jeg legger sammen aldrene deres, hva får jeg da?» spør venninnen. «Da får du husnummeret vårt», svarer Marit. Venninnen ser på husnummeret, og tenker litt: «Jeg vet fortsatt ikke hvor gamle de er.» «Det gjør ikke noe», sier Marit, «for det er bare den eldste som ikke har lagt seg ennå.»«Men da vet jeg hvor gamle de er», sier Marits venninne og smiler. Hvor gamle er barna, og hvilket husnummer har Marit?

**14.** I denne og den neste oppgaven skal vi bevise aritmetikkens fundamentalteorem. Vi begynner med den letteste delen: Vis at ethvert naturlig tall større enn 1 kan skrives som et produkt av primtall. (*Hint:* Anta at påstanden ikke er sann, og la $N$ være det minste tallet som ikke kan skrives som et slikt produkt. Utled en selvmotsigelse.)

**15.** Dette er en fortsettelse av oppgave 14. Vi skal vise at ethvert naturlig tall større enn 1 kan skrives som et produkt av primtall på bare én måte. Anta for motsigelse at dette ikke er riktig, og la $N$ være det minste tallet som kan skrives som et slikt produkt på mer enn en måte.

a) Vis at $N$ ikke er et primtall.

I resten av denne oppgaven lar vi $N = p_1 p_2 \ldots p_m$ og $N = q_1 q_2 \ldots q_n$ være to forskjellige primtallsfaktoriseringer av $N$, og antar at faktorene er ordnet slik at $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_m$ og $q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_n$.

b) Vis at alle $p$-ene er forskjellig fra alle $q$-ene.

c) Vis at $q_1$ ikke deler $p_2 p_3 \ldots p_n$. (*Hint:* I så fall ville $p_2 p_3 \ldots p_m$ ha to forskjellige primtallsfaktoriseringer.)

d) Vis at $N - p_1 q_1 > 1$.

e) Vis at $N - p_1 q_1$ har to forskjellige primtallsfaktoriseringer. Forklar hvorfor dette beviser påstanden.

## 1.2 Induksjonsbevis

Dersom vi begynner å telle fra 1:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \ldots$$

vil vi før eller senere komme frem til et hvilket som helst naturlig tall. Denne enkle egenskapen ved de naturlige tallene ligger bak en viktig bevisteknikk som kalles *induksjonsbevis*. La oss først se på et eksempel.

### 1.2.1 Eksempel

La oss late som vi nettopp har lært å derivere, og at vi har funnet ut at

$$x' = 1, \qquad (x^2)' = 2x, \qquad (x^3)' = 3x^2, \qquad (x^4)' = 4x^3.$$

Er vi litt smarte, ser vi et klart mønster i disse resultatene, og vi begynner kanskje å lure på om

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

for alle naturlige tall $n$. Første trinn i å teste denne hypotesen er å undersøke om den holder for $n = 5$. Vi deriverer altså $x^5$, og siden vi vet hva den deriverte til $x^4$ er, så er det naturlig å gjøre dette ved hjelp av produktregelen:

$$(x^5)' = (x^4 \cdot x)' = 4x^3 \cdot x + x^4 \cdot 1 = 5x^4,$$

som er akkurat det vi håpet å få. La oss forsøke å gjenta suksessen med $x^6$:

$$(x^6)' = (x^5 \cdot x)' = 5x^4 \cdot x + x^5 \cdot 1 = 6x^5,$$

som igjen er akkurat det vi burde få.

Dette ser unektelig ganske lovende ut, men vi kan jo ikke fortsette på denne måten; det er ingen som orker å derivere $x^{11237}$ ved å gjenta denne prosedyren 11231 ganger til! Det vi trenger, er et argument som tar hånd om alle disse regningene en gang for alle.

Vi starter med å legge merke til at de to regningene som ga oss de deriverte til $x^5$ og $x^6$, i prinsippet er helt like. I begge tilfeller startet vi med å vite at $(x^k)' = kx^{k-1}$ (for $k$ lik henholdsvis 4 og 5), og utledet derfra at $(x^{k+1})' = (k+1)x^k$. Denne regningen kan vi like godt gjennomføre med bokstavuttrykk; dersom vi vet at $(x^k)' = kx^{k-1}$ for et eller annet naturlig tall $k$, så er

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k+1)x^k. \tag{1}$$

Hva betyr dette? Jo, la oss si at for hvert naturlig tall $n$, så er $P_n$ den påstanden vi forsøker å bevise, altså:

$$P_n\colon \quad (x^n)' = nx^{n-1}.$$

Vi har da sjekket at $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, $P_5$ og $P_6$ er sanne. Dessuten viser (1) at

$$\text{dersom } P_k \text{ er sann for et naturlig tall } k, \text{ så er } P_{k+1} \text{ også sann.} \tag{2}$$

Men nå er det lett å innse at $P_n$ må være sann for alle $n$. Hvis vi nemlig velger $k = 6$, så vet vi at $P_6$ er sann, og dermed er $P_7$ sann ifølge (2). Men da kan vi velge $k = 7$,

og slutte at siden $P_7$ er sann, så må $P_8$ også være det. Deretter velger vi $k = 8$, og ser at siden $P_8$ er sann, så må $P_9$ være sann osv. Fortsetter vi på denne måten, kommer vi før eller senere frem til et hvilket som helst naturlig tall, og følgelig er $P_n$ sann for alle $n \in \mathbb{N}$. ■

Bak dette eksemplet ligger det et generelt prinsipp:

### 1.2.2 Induksjonsprinsippet

Anta at for hver $n \in \mathbb{N}$ har vi gitt et utsagn $P_n$. Anta videre at vi vet at følgende to krav er oppfylt:

(i) $P_1$ er sann.

(ii) Dersom $P_k$ er sann for en $k \in \mathbb{N}$, så er $P_{k+1}$ også alltid sann.

Da er $P_n$ sann for alle $n \in \mathbb{N}$.

For å grunngi dette prinsippet argumenterer vi på samme måte som i eksemplet ovenfor.

Vi tar for oss et annet eksempel på hvordan prinsippet kan anvendes.

### 1.2.3 Eksempel

Vi vet at summen til en endelig geometrisk rekke er

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \qquad \text{for} \quad x \neq 1.$$

La oss se hvordan dette kan bevises ved induksjon. Påstanden $P_n$ blir i dette tilfellet

$$P_n\colon \ \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \qquad \text{når} \quad x \neq 1.$$

Når vi bruker induksjonsprinsippet, må vi sjekke to ting – for det første at $P_1$ er sann, og deretter at $P_k$ medfører $P_{k+1}$. Å sjekke at $P_1$ er sann, betyr i dette tilfellet å vise at

$$1 + x = \frac{1 - x^2}{1 - x}$$

og det gjør vi lett ved å faktorisere telleren på høyre side og så forkorte:

$$\frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{1 - x} = 1 + x$$

La oss så anta at $P_k$ er sann, det vil si at

$$\sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}.$$