QED 5–10:
Geometri og måling

Andrea Hofmann, Trond Stølen Gustavsen,
Kristin Ran Choi Hinna og Trude Sundtjønn

QED 5–10: Geometri og måling

Matematikk for grunnskolelærerutdanningen

CAPPELEN DAMM AKADEMISK

© CAPPELEN DAMM AS, Oslo, 2026

ISBN 978-82-02-91634-3

1. utgave, 1. versjon 2026

E-utgaven tilsvarer 1. trykte utgave, Cappelen Damm Akademisk, 2026

Materialet i denne publikasjonen er omfattet av åndsverklovens bestemmelser. Uten særskilt avtale med forlaget er enhver eksemplarfremstilling og tilgjengeliggjøring bare tillatt i den utstrekning det er hjemlet i lov eller tillatt gjennom avtale med Kopinor, interesseorgan for rettighetshavere til åndsverk. Enhver bruk av hele eller deler av utgivelsen som input eller som treningskorpus i generative modeller som kan skape tekst, bilder, film, lyd eller annet innhold og uttrykk, er ikke tillatt uten særskilt avtale med rettighetshaverne.

Bruk av utgivelsens materiale i strid med lov eller avtale kan føre til inndragning, erstatningsansvar og straff i form av bøter eller fengsel.

Omslagsdesign: Merkur Grafisk AS
Sats: Merkur Grafisk AS (Vegard Brekke)

Første- og andreforfatter har mottatt støtte fra Norsk faglitterær forfatter- og oversetterforening (NFFO) til arbeidet med denne boka.

Boka er utgitt med støtte fra Kunnskapsdepartementet.

Cappelen Damm arbeider aktivt for å redusere miljøbelastningen fra våre utgivelser. Les mer om vårt miljøarbeid på https://cappelendamm.no/baerekraft

www.cda.no
akademisk@cappelendamm.no

Forord

Da *QED 5–10* først ble utgitt i 2011, var det med ambisjonen om å tilby lærerutdanningen et helhetlig og faglig solid verk i matematikk. Siden den gang har både samfunnet, skolen og lærerutdanningen vært i kontinuerlig utvikling. Nye rammeplaner, endringer i skolen og faglige impulser har aktualisert behovet for en revisjon, og da dette arbeidet tok til, vokste ideen fram om å omstrukturere verket i fire tematiske bøker. Nå har denne ideen blitt til virkelighet, og vi har gleden av å presentere ei bok i den nye serien: *QED 5–10: Geometri og måling*.

Serien vil bestå av følgende bøker:

QED 5–10: Tall og tallteori

QED 5–10: Algebra og funksjoner

QED 5–10: Geometri og måling

QED 5–10: Statistikk og sannsynlighet

Til revisjonsarbeidet har vi fått med flere nye forfattere for å utvide den samlede kompetansen. Selv om mange av de opprinnelige styrkene og perspektivene er videreført, er bøkene i stor grad nyskrevne og tilpasset dagens behov i skolen og lærerutdanningen. Programmering i matematikk har fått en tydeligere plass, og det er lagt inn eksempler og oppgaver som viser hvordan dette kan integreres i undervisningen.

Et særtrekk ved *QED 5–10* har vært kombinasjonen av faglig grundighet og didaktisk refleksjon. I de nye bøkene er dette videreført og utviklet: Matematikkfaglige begreper og innsikter belyses i lys av undervisningskunnskap og elevers læring. Vi mener at dyp fagforståelse og god didaktikk henger tett sammen, og håper at bøkene vil bidra til å ruste framtidige lærere for et lærerikt og meningsfullt møte med matematikkundervisningen.

QED 5–10: Geometri og måling er skrevet av Andrea Hofmann og Trond Stølen Gustavsen, med Kristin Ran Choi Hinna og Trude Sundtjønn som medforfattere. Boka bygger også på bidrag fra Reinert Rinvold, Odd Tore Kaufmann, George Harry Hitching, Hans Wilhelm Hoyer Mørch og Nils Henry Williams Rasmussen, som har stilt tekst fra tidligere QED-utgaver til disposisjon. Vi takker dem for at vi har fått videreføre og videreutvikle deres faglige og tekstlige arbeid i denne utgaven.

I arbeidet med denne boka er KI-verktøy (jf. referanselisten) brukt på en avgrenset måte, til å generere kode som har produsert enkelte av de matematiske figurene, og til forbedring av enkelte tekstavsnitt. All tekst og alle figurer er gjennomgått, redigert og kvalitetssikret av forfatterne, som står ansvarlig for innholdet.

Vi ønsker å takke seniorredaktør Bjørn Olav Aas Hansen, som har fulgt serien gjennom mange år med både tro og drivkraft, og som har vært en avgjørende støtte i revisjonsprosessen. Takk også til manusredaktør Bjørg Torhild Johnsen for stødig og strukturert oppfølging, til språkkonsulent Siv Rekve for grundig og språklig trygg gjennomgang og til Vegard Brekke for den grafiske utformingen. Vi vil også rette en takk til fagkonsulenter, kollegaer og lesere av de opprinnelige bøkene – og ikke minst studentene – som har gitt innspill og tilbakemeldinger som har bidratt til å forme denne nye utgaven.

Redaksjonsgruppa, Kristiansand, Drammen og Oslo

Kristin Ran Choi Hinna, Trond Stølen Gustavsen og Trude Sundtjønn

Innhold

Innledning **11**

Kapittel 1 **Geometri og måling: Erfaring, historie og undervisning** **15**
1.1 Elevers møte med geometri 16
1.2 Geometriens historie 18
1.3 Å lære å undervise geometri 20

Kapittel 2 **Todimensjonale figurer** **21**
2.1 Punkter og linjer 21
2.2 Elevers forståelse av begrepene punkt og linje 26
2.3 Vinkler 28
2.4 Elevers forståelse av vinkler 30
2.5 Mangekanter 33
2.6 Geometriske figurer ved hjelp av papirbretting 45
2.7 Geometriske figurer i Tangram 47
2.8 Geometriske figurer og programmering 50
2.9 Sirkler 52
2.10 Geometri med passer og linjal 57
2.11 Nivåer i elevers utvikling av geometrisk forståelse 61
2.11.1 van Hiele-nivå 1 – Visualisering 62
2.11.2 van Hiele-nivå 2 – Analyse 63
2.11.3 van Hiele-nivå 3 – Abstraksjon og uformell deduksjon 64
2.11.4 van Hiele-nivå 4 – Deduksjon 65
2.11.5 Overganger i van Hiele-modellen 65

Kapittel 3 **Tredimensjonale figurer** **73**
3.1 Romforståelse og romlig resonnering 74
3.2 Prismer og pyramider 80
3.3 Kuler, sylindre og kjegler 81
3.4 Skjæring mellom tredimensjonale figurer og et plan 83
3.5 Polyedre 85
3.5.1 Regulære polyedre 87
3.5.2 Arkimediske legemer (semiregulære polyedre) 91

Kapittel 4 **Måling og måleenheter** **99**
4.1 Hva er måling? 100
4.2 Måleenheter 101
4.3 Måling i skolen 103
4.4 Måling av lengde 104
4.5 Måling av areal 108
4.6 Måling av volum 111
4.7 Måling av vinkler 115
4.8 Måling av tid 117
4.9 Sammensatte måleenheter 121
4.10 Måleusikkerhet 123
4.11 Avrunding 125

Kapittel 5 **Omkrets, areal og volum** **133**
5.1 Omkrets 134
5.2 Areal 135
5.3 Omkrets og areal av en sirkel 140
5.4 Overflateareal til polyeder, sylinder og kjegle 142
5.5 Volum av polyeder, sylinder og kjegle 145
5.5.1 Volumet av en pyramide 149
5.6 Volum og overflateareal av en kule 151
5.6.1 Volum av en (halv-)kule 151
5.6.2 Overflateareal av en kule 152

Kapittel 6 **Avbildninger i planet, kongruens, symmetri og formlikhet** **163**
6.1 Kongruens 165
6.2 Kongruensavbildninger 166
6.2.1 Kongruensavbildninger i GeoGebra 174
6.3 Kongruenssetningene 179
6.4 Symmetri 184
6.5 Formlikhet 192
6.6 Sammensetning av avbildninger 209
6.7 Båndmønster 216
6.8 Tapetmønster 222
6.8.1 Tesselering 224
6.8.2 Escher – en mester til å lage tapetmønstre 231

Kapittel 7 **Resonnering, argumentasjon og bevis i geometri** **241**
7.1 Resonnering, argumentasjon og bevis i skolematematikken 243
7.2 Bevisets historie 248
7.3 Definisjoner og aksiomer 253
7.4 Ulike former for resonnering og argumentasjon 257
7.5 Deduktive bevis i geometri 261

Kapittel 8 **Pytagoras' setning, Thales' setning og periferivinkelsetningen 277**
8.1 Pytagoras' setning 277
8.2 Thales' setning og periferivinkelsetningen 282
8.3 Euklids katetsetning og Euklids høydesetning 286

Kapittel 9 **Trigonometri 293**
9.1 Cosinus til en vinkel i en rettvinklet trekant 294
9.2 Sinus og tangens til en vinkel i en rettvinklet trekant 298
9.3 Cosinus, sinus og tangens for vinkler over 90 grader 301
9.4 Sinussetningen og cosinussetningen 304
9.5 Vinkler i radianer og periodiske funksjoner 307

Kapittel 10 **Konstruksjoner 315**
10.1 Konstruksjoner med passer og linjal 316
10.2 Konstruksjoner i GeoGebra 326
10.3 Konstruksjon ved hjelp av programmering 329
10.3.1 Geometri med Pyplot 329
10.3.2 Geometri med SymPy 332
10.4 Det gylne snitt 337
10.5 Perspektivtegning 341
10.6 Konstruksjoner som er umulige å gjennomføre med kun passer og linjal 346
10.6.1 Sirkelens kvadratur 346
10.6.2 Vinkelens tredeling 348
10.6.3 Kubens fordobling 349

Kapittel 11 **Analytisk geometri 361**
11.1 Linjer i planet 362
11.2 Sirkler og ellipser 367
11.3 Kjeglesnitt 375
11.4 Vektorer i koordinatsystem 378
11.5 Skalarprodukt 386
11.6 Kongruensavbildninger og symmetrier i koordinatsystemer 391
11.7 Eksempler på bruk av vektorregning 397

Kapittel 12 **Ikke-euklidsk geometri 417**
12.1 Elliptisk geometri 418
12.2 Hyperbolsk geometri 421
12.3 En liten oversikt over noen egenskaper i euklidsk og ikke-euklidsk geometri 424

Kapittel 13

Utforskning og problemløsning **427**
13.1 Problemløsning 429
13.2 Utforskning 434
13.3 Pólya og problemløsningsprosessen 437
13.3.1 Mer om Pólyas fire faser 438
13.3.2 Ikke-lineær natur 440
13.3.3 To typer problemer: Å finne og å bevise 440
13.3.4 Pedagogisk anvendelse 441
13.3.5 Pólya om heuristikk 445
13.3.6 Misoppfatninger om Pólyas system 448
13.3.7 Pólya i grunnskolen 448
13.4 Å tenke matematisk 449
13.4.1 Spesialisering og generalisering 449
13.4.2 Faser i det matematiske arbeidet 451

Litteratur **461**
Symbolforklaring **465**
Forfatteromtaler **467**
Bildeliste **469**
Stikkord **473**

Innledning

I grunnskolelærerutdanningen rettet mot undervisning på 5.–10. trinn kan du velge hvilke skolefag du ønsker å utdanne deg i. Når du nå holder denne boka i hånden, har du valgt å ha matematikk som ett av fagene, noe vi er glade for. Matematikk brukes overalt i samfunnet og er nødvendig for å forstå verden rundt oss, for å delta i demokratiet, for å opprettholde et moderne teknologisk samfunn, i ingeniørfag, økonomi, forskning, offentlig forvaltning og for å forstå informasjon i media. Matematikk er også et kunstfag hvor man møter overraskende sammenhenger, elegante løsninger og nydelige mønstre. Det er en viktig del av allmenndannelsen å ha kunnskap i matematikk. Dette er grunnene til at matematikk er et av de mest sentrale skolefagene. Som lærer skal du være en brobygger mellom elevens verden, matematikkfaget og samfunnets behov for matematisk kompetanse. Elevene trenger å se at skolefaget henger sammen med den virkeligheten de opplever, og at matematikk er nyttig både i arbeidslivet og for å fungere godt i samfunnet.

Gode og dyktige matematikklærere er til inspirasjon for elevene. Det er viktig at du som matematikklærer er glad i faget og har en god faglig ballast. Mange, både voksne og barn, gir uttrykk for at matematikk er et fag som vekker mange følelser. Ber du dem fortelle hva de tenker på når de hører ordet matematikk, er det påfallende mange negativt ladede ord som blir nevnt. Ord som vanskelig, komplisert, kjedelig, frustrerende, avanserte tegn, abstrakt og pugging er noen ord som går igjen. Det er ikke slike ord vi ønsker at elevene våre skal assosiere matematikk med. Vi ønsker at du og elevene dine skal tenke på ord som spennende, kreativ og lærerik, givende, interessant, lek og fantasi, mønster, forståelse, vakre geometriske former, lærerikt og viktig.

For å forstå dagens matematikkfag i skolen er det nyttig å vite litt om den historiske utviklingen. Navnet på faget har ikke alltid vært som nå. I Normalplanen av 1939 (N39) het det rekning. Faget hadde to mål: ett innenfor tall og ett innenfor geometri (former og størrelser). De andre skolefagene var kristendomskunnskap, norsk, heimstadlære, geografi, naturfag, skriving, tegning, sang, handarbeid, kroppsøving og engelsk. I læreplanen for forsøk med 9-årig skole fra 1960 ble rekning erstattet med matematikk, men først for 7.–9. klasse. Etter denne planen skal elevene i 1.–4. klasse ha rekning, mens fra 5. klasse er faget delt inn i to hovedemner: «Rekning og algebra» og «Geometri og romlære». I de senere år har det blitt utviklet en teori om kompetanseområder i skolefaget matematikk som har fått vesentlig innflytelse på læreplaner og matematikkfaget i skolen. Disse kompetanseområdene gjenspeiler en vid oppfatning av hva matematikk er.

Den viktigste delen av matematikken er å se sammenhenger og vise hvorfor disse sammenhengene er slik de er. Videre brukes matematikk til å modellere verden, såkalt anvendt matematikk. Dette har i de senere årene kommet mer inn i skolen. Mens matematikk som skolefag tidligere ble sett på som et fag med spesifikke metoder man skulle lære, er nå bevis og argumentasjon, modellering og anvendelser kommet mye sterkere inn. Noe nytt som har kommet inn med den siste læreplanen i grunnskolen, er algoritmisk tenkning og programmering. Vi har derfor tatt med små dataprogrammer der vi tenker det kan være relevant.

Denne boka i QED-serien handler om geometri og måling. Underveis i boka prøver vi å vise fram ulike måter du kan undervise fagstoffet på, og knytte matematikken opp mot din rolle som lærer i skolen.

Vi prøver å være grundige i alle definisjoner, slik at boka i tillegg til å være ei lærebok, kan fungere som et oppslagsverk for spørsmål du kanskje har om grunnleggende matematikk. Vi prøver å drøfte de fleste begreper, men hvis du ikke forstår drøftingen, kan du prøve å gå rett til den matematiske formuleringen. Når du har sett den matematiske formuleringen, og et par eksempler, kan du gå tilbake til drøftingen og se om den nå gir mer mening. Ofte vil du oppdage at det egentlig er drøftingen som forklarer begrepet, og ikke minst motivasjonen for å innføre det. Men presiseringene skjer gjennom definisjoner. Hvis vi ser på alle definisjonene i et kapittel først, har vi det grunnleggende ordforrådet i det matematiske språket. Det er først etter at vi har dette grunnlaget at det gir mening å se på setningene og eksemplene.

Med en god faglig forankring er det lettere å improvisere, følge opp elevenes resonnementer og kunne tilrettelegge for alle elevene i klassen. Som lærer må du ha faglig innsikt for å kunne gi elever passende utfordringer slik at de opplever mestring, samtidig som de strekker seg mot

ny kunnskap. Dette er ei bok om matematikk og matematikklæring skrevet for å hjelpe deg til å bli en god lærer i faget. Du vil naturlig nok finne mye matematikk i boka, men vinklingen er hele tiden preget av det yrket du utdanner deg til. Mye fagstoff vil du gjenkjenne, men kanskje er det uvant at så mye oppmerksomhet rettes mot forståelse av faget.

Oppbygging

For å få en fullstendig oversikt over og forståelse for matematikkfaget må du kunne flere emner innen matematikk, f.eks. tall og tallteori, algebra og funksjoner og statistikk og sannsynlighet. Disse matematiske emnene vil vi ta opp i egne bøker, og til sammen vil de utgjøre hele serien QED 5–10. For å oppnå læringsutbyttene nedfelt i nasjonale retningslinjer for grunnskolelærerutdanning trinn 5–10 vil man måtte støtte seg på alle de fire bøkene i QED 5–10. Noe av fagstoffet i bøkene vil gi deg kunnskap, ferdigheter og generell kompetanse som er målene for matematikk 1, mens fordypning av lærestoff vil gi deg kunnskap, ferdigheter og generell kompetanse som er mål for matematikk 2. Uansett hvilke av bøkene (Tall og tallteori, Geometri og måling, Algebra og funksjoner og Statistikk og sannsynlighet) du jobber med, skal du kunne gjenkjenne vårt ønske for bøkene: et fokus på hvordan elevene lærer matematikk, hvordan man kan lære om ulike tilnærminger og løsningsmetoder, og hva du som lærer kan gjøre for å gi elevene en god matematikkforståelse og strategirikdom til å kunne løse ulike matematiske problemer. I de ulike bøkene vil vi prøve å vise fram ulike måter du kan undervise fagstoffet på, og knytte matematikken opp mot din rolle som lærer i skolen.

Sammenheng og helhet

Denne boka skal ikke leses som en roman fra første til siste side. Ved første gangs lesning er det naturlig å hoppe over de fleste kryssreferansene og kanskje noen av bevisene, men etter hvert som du kommer lenger ut i studiet, kan du styrke forståelsen din ved å slå opp stadig flere av dem. Enkelte tema går igjen mange steder, blant annet bruk av programmering og digitale verktøy. Underveis i boka tas digitale verktøy opp der det naturlig inngår i det matematiske fagstoffet og læringen av det.

Forklaringer

Det brukes mye plass til forklaringer i form av tekst, bilder og figurer. Selvsagt vises det hvordan utregninger skal foretas, og hvilken betydning ulike symboler har, men langt mer enn dette må forklares. Matematikk består av en rekke ideer og tenkemåter som ikke kan formidles bare ved å skrive ned matematiske symboler. I tillegg har matematikken en rekke

begreper, som for eksempel kvadrat og kongruensavbildning. Alle matematiske begreper har en definisjon, men de trenger også en forklaring i tillegg til definisjonen. Historiske eksempler er et av bokas virkemidler for å formidle ideer som du ikke selv uten videre kan se fra en formell framstilling av matematikken. I tillegg til matematikkens ideer forklarer vi hvordan du kan legge til rette for elevers læring av de faglige emnene.

Eksempel

Eksempler kan vise ulike framgangsmåter og måter å tenke på. Ofte er eksempler utgangspunktet for bokas forklaring av ideer. Dette blir gjerne markert med «Diskusjon». I læreplanen LK20 er programmering tatt med i matematikkfaget. Der hvor vi mener at et dataprogram kan øke forståelsen for matematikken som omtales, har vi tatt med programmeringskode. Du bør alltid prøve å forstå både det programmeringstekniske og det matematiske innholdet i disse kodene.

Definisjon

Definisjoner klargjør den formelle betydningen av matematiske eller pedagogiske begreper og matematiske symboler. Vi vil ofte drøfte definisjonen og trekker da i tillegg fram intuisjon og ideer som er nødvendige for å bruke og forstå definisjonen.

Setninger og aksiomer

En setning er en generell sann matematisk påstand. Aksiomer er ubevisbare grunnprinsipper som setninger kan utledes fra. I geometri er Euklids aksiomer sentrale. Definisjoner, setninger og aksiomer er skilt ut med rammer.

Oppgaver

Oppgaver kommer på slutten av kapitler eller delkapitler. Det betyr ikke nødvendigvis at du skal lese all teksten i et kapittel eller delkapittel før du arbeider med oppgaver. Noen få steder ber vi deg i selve teksten å tenke over noe før du fortsetter, men du bør ha en reflekterende tilnærming hele tiden. Læring av matematikk skjer gjennom en veksling mellom ulike arbeidsformer, der lesning av bokas tekst og arbeid med oppgaver er to av dem. En del oppgaver øver på teknikker og løsningsmetoder, men det er mange oppgaver der du alene eller sammen med andre studenter blir bedt om å reflektere over, å forklare eller å lage egne eksempler, oppgaver eller undervisningsopplegg. Du som student er et skapende individ i møtet med samfunn og kultur. Du skal både lære deg teknikker og metoder som inngår i den matematiske og pedagogiske kulturen, og selv aktivt gjøre kunnskapen til din egen og anvende den på nye situasjoner. Oppgaver er en god måte å lære seg nytt stoff på.

KAPITTEL



Geometri og måling: Erfaring, historie og undervisning

Geometri og måling er knyttet tett sammen. Mens geometri handler om å forstå form og størrelse, handler måling om å tallfeste størrelser. Begreper som figurer, linjer og flater er sentrale i geometri, og kan brukes til å beskrive viktige aspekter ved våre naturlige omgivelser. Derfor er geometri viktig for oss, og det er kanskje også grunnen til at geometrien er en av de eldste vitenskapene. Geometri som fagfelt kan spores tilbake til minst 3000 år f.Kr.

Enten vi tenker over det eller ikke, er det geometri i alt vi ser rundt oss. Akkurat der du nå sitter og leser dette, kan du helt sikkert identifisere flere geometriske figurer. Sitter du ved et bord, legger du kanskje merke til at bordflaten danner et rektangel, og du kan helt sikkert finne flere rektangler uten å flytte blikket særlig mye. Hva med sirkler? Det er nokså sannsynlig at du kan se flere sirkler fra der du er. Kanskje en lampeskjerm, eller en blomsterpotte? Sannsynligvis har du for ikke lenge siden spist fra en sirkelformet tallerken. Dette er en øvelse du også kan gjøre med barn – hvilke geometriske former klarer dere å finne i omgivelsene?

Når vi arbeider med geometriske figurer, er vi ofte opptatt av å fastslå størrelser. Vi kan for eksempel måle lengdene av grunnlinja og høyden i en trekant, og bruke dette til å regne ut trekantens areal. Romfigurer som kjegler, kuler og sylindre har et volum som vi kan beregne dersom vi kjenner de riktige lengdemålene. I praktisk matematikk har vi ofte behov for å fastslå størrelser. Fyller du for eksempel bensin på bilen, vil du være sikker på at du betaler for riktig antall liter bensin. Når du baker eller lager mat, er det viktig med riktige mengder av ingrediensene. Måling er en så vanlig og viktig del av livet at vi ofte ikke tenker over det. Likevel er måling noe du har lært, og måling er også noe dine elever må lære.



Geometri og måling er ikke bare viktig i dagliglivet, men også i en rekke yrker. Innen bygg og anlegg brukes geometri og måling for å designe ulike typer konstruksjoner, hvor man må ha god forståelse for lengdemålinger og konstruksjonsprinsipper. Arkitekter arbeider med former og geometriske uttrykk, mens blikkenslagere bruker geometri når de utformer ulike beslag. Verktøymakere er avhengige av svært nøyaktige målinger og kunnskap om geometriske former i sitt arbeid. Kort sagt: Geometri og måling er avgjørende i en rekke yrker.









1.1 Elevers møte med geometri

Det finnes en rekke grunner til at geometri spiller en sentral rolle i skolematematikken. Geometri tillater elever å engasjere seg i tegning og konstruksjon av forskjellige figurer, samtidig som det hjelper dem å forstå sammenhenger innenfor og mellom disse figurene. Dessuten får elevene verktøy for å undersøke romlige aspekter ved den fysiske virkeligheten. Dette kan for eksempel være kart og konstruksjonstegninger og studier av symmetri. I tillegg gir geometri verktøy for å representere ikke-visuelle matematiske ideer og sammenhenger i andre matematiske disipliner, som diagrammer og grafer. For eksempel, når elever skal lage et sektordiagram i statistikk, er det nødvendig med geometriske begreper som sirkel og vinkel.

I geometri brukes begreper som vinkel, lengde, areal og volum. Begrepene danner grunnlaget for å kunne resonnere og kommunisere om geometriske størrelser. Samtidig tilbyr geometri verktøy for å forstå vår omkringliggende virkelighet, noe som gjør praktisk geometri til en uvurderlig hjelp når vi står overfor praktiske utfordringer. For eksempel trenger du måling og geometri når du skal finne en sofa som passer godt inn i din nye leilighet. Det finnes også mange naturlige fenomener som kan beskrives gjennom geometri. Planter og trær har for eksempel

symmetriske egenskaper som vi kan beskrive ved hjelp av geometrisk språk. Dessuten kan kjennskap til geometri gi elever en dypere forståelse av kunst og arkitektur.

Barn utvikler naturlig en forståelse av rom og former (Nunes et al., 2009). Dette er essensielt for å tolke visuelle inntrykk og for å navigere og interagere med fysiske gjenstander. Selv om mange barn viser en bemerkelsesverdig evne til å forstå sine romlige omgivelser, opplever mange utfordringer når de skal lære å analysere rom og form matematisk (Nunes et al., 2009). Tenkning om geometriske objekter er svært sammensatt (Battista, 2007), og det er avgjørende å skille mellom fysiske objekter og teoretiske geometriske objekter. Tenk deg at du har klippet ut en trekant i papp som en elev skal arbeide med i en matematikktime. Når eleven ser pappfiguren, dannes det et sanseinntrykk. Basert på dette sanseinntrykket danner eleven en oppfatning av hva han eller hun ser, og kan deretter assosiere pappfiguren med begrepet trekant. Vi vil ofte si at pappfiguren er en trekant, men som lærer må du være oppmerksom på at en pappfigur, eller en tegning av en trekant, ikke rommer alt av hva en trekant innebærer. Det avgjørende er å hjelpe eleven til å identifisere egenskapene som definerer en trekant, at en trekant alltid består av tre linjestykker som møtes i tre hjørner, og samtidig skille disse fra de tilfeldige egenskapene ved en konkret figur, som størrelse, farge eller materialet den er laget av, og så videre. Det finnes for eksempel andre trekanter som ser helt forskjellige ut enn den trekanten du har tegnet eller klippet ut i papp, men det er noe som er felles for alle trekanter. Prosessen med å tilegne seg begrepet «trekant» som en todimensjonal figur med tre sider som møtes i tre hjørner, kan være utfordrende for eleven.

Barn opparbeider mer eller mindre automatisk en forståelse av rom og former på bakgrunn av medfødte evner og naturlig utvikling i fysiske omgivelser. Geometri som en del av matematikkfaget handler imidlertid om å analysere forhold knyttet til former og størrelser med presise matematiske begreper og systematisk resonnement. Det er viktig å framheve at nøyaktige matematiske definisjoner og geometrisk resonnement ikke er vanlig i hverdagsspråket. Hverdagsspråk omtaler ofte figurer og former på en situasjonsavhengig og unøyaktig måte, mens matematikk krever eksakte begreper og argumenter som kan etterprøves. Derfor utvikles ikke matematisk tenkning automatisk, men må opparbeides gjennom systematisk opplæring. Skolegeometrien er en del av kulturen som overleveres fra én generasjon til den neste, og behovet for matematiske beskrivelser av det vi ser rundt oss, er en viktig grunn til at elevene lærer om geometri.

Matematikkfagets målsetting kan ikke oppnås bare ved at elever selv får erfare geometriske figurer. Læreren må aktivt legge til rette for elevens læring av geometriske begreper. Det ligger likevel et stort potensial

i elevenes egen forståelse av rom og former som de har med seg når de begynner på skolen, og geometriundervisningen må bygge på denne. Mange elever har ofte et forhold til begreper som for eksempel sirkel, trekant og firkant fra barnehagen, og lekpreget aktivitet spiller en viktig rolle også i geometriopplæringen i barnetrinnet. Læreren planlegger og legger til rette for elevenes læring, mens elevene fortsatt gis stor grad av frihet. Det er fortsatt elevene som har kontroll over hva som skjer, hva de vil utforske, og hvilke handlinger de gjør.

1.2 Geometriens historie

Geometri (fra gresk for måling av jord) handler om figurers størrelse og form.

Geometriske objekter kan være endimensjonale, todimensjonale eller tredimensjonale. Endimensjonale objekter er linjer og kurver. Eksempler på todimensjonale geometriske objekter er trekanter, firkanter, sirkler og polygoner. Tredimensjonale geometriske objekter inkluderer kuber, kuler, sylindere, kjegler, pyramider og prismer. Linjer og punkter er viktige begreper i geometri. De geometriske objektene kan beskrives ved hjelp av ulike egenskaper, som størrelse, form, posisjon, orientering og vinkler. De kan også transformeres ved hjelp av ulike teknikker, som translasjon, rotasjon og refleksjon.

Geometriens opprinnelse kan spores tilbake til flere kulturer. De eldste kildene går tilbake til Indusdalen, Babylonia og Egypt. Rundt 2900 f.Kr. ble den første pyramiden bygget, og dette krevde kunnskap innen geometri. Kunnskap om geometri var også viktig da en egyptisk farao ønsket å kreve skatt fra gårdbrukere som dyrket korn langs Nilen. For å beregne den riktige skatten måtte faraos menn beregne arealet av landområdene som ble kultivert.

Geometrien slik vi kjenner den i dag, har hatt sin sterkeste innflytelse fra den greske sivilisasjonen. Gresktalende matematikere utviklet geometrien fra omtrent 600 f.Kr. og utover. I deres tradisjon ble geometrien sett på som kronjuvelen blant vitenskapene, og det var grekerne som introduserte den logisk-deduktive metoden. Tidligere hadde geometrien ofte utgangspunkt i erfaring, og prinsipper og formler var i stor grad basert på hva som viste seg å stemme i praktiske situasjoner. Grekerne, på den annen side, innså nytten av logiske utledninger for å etablere geometrisk kunnskap, og i dag er den logisk-deduktive metoden utgangspunktet for all matematisk kunnskap.

Den aller mest innflytelsesrike eldre kilden innen geometri er Euklids Elementer (Euclid 2000a, 2000b, 2000c; Joyce, 1996–1998). Dette verket er datert til rundt 300 år f.Kr., og er et av de mest innflytelsesrike verkene som noen gang er skrevet. I den vestlige verden er det antagelig bare Bibelen som har blitt distribuert videre og studert nøyere. Helt opp til vår egen tid ble Elementer oppfattet som obligatorisk lesning for alle med utdanning.

Figur 1
Euklids Elementer


EUKLIDS ELEMENTER

I–II

OVERSAT AF

THYRA EIBE

CAND. MAG.

MED EN INDLEDNING AF PROF., DR. H. G. ZEUTHEN

KØBENHAVN

GYLDENDALSKE BOGHANDELS FORLAG (F. HEGEL & SØN)

1897

Elementer bidro til å etablere matematikken som en logisk deduktiv vitenskap. I verket starter Euklid med noen få definisjoner og postulater, og ut fra disse beviser han setninger som igjen brukes sammen med definisjonene til å bevise flere setninger. På denne måten bygger han opp hele geometrien ved det vi kaller logisk-deduktiv metode.

Det var ikke Euklid selv som oppdaget all matematikken som ble skrevet ned i *Elementer*. Mye av det som står der, går tilbake til matematikere som for eksempel Thales og pytagoreerne som levde før Euklid. Euklids bidrag var først og fremst å samle disse resultatene, systematisere dem og presentere dem i system med klare definisjoner, postulater og bevis.

Matematikken og geometrien fortsatte å utvikle seg etter Euklid. Vi kan for eksempel nevne Arkimedes. Han viste hvordan vi kan finne volum og overflateareal av kuler og sylindre.

I middelalderen ble det gjort store framskritt innen geometri og andre deler av matematikken i den islamske verden. Tiden 622–1600 omtales gjerne som den islamske gullalder, og i denne perioden ble det gjort store framskritt i mange vitenskaper. Innenfor geometri kan vi nevne utvikling av sfærisk geometri og trigonometri. I den vestlige verden ble René Descartes (1596–1650) den som kombinerte algebra og geometri til det vi nå kaller analytisk geometri. I skolen møter vi Descartes' ideer når vi jobber med koordinatsystemer.

Den utviklingen innenfor geometri som kommer etter Descartes, beveger seg etter hvert utover det som vi regner som den sentrale skole-matematikken. Det er likevel viktig å nevne utviklingen av ikke-euklidsk geometri. Denne geometrien er med på å danne grunnlaget for Einsteins relativitetsteori, som kom på begynnelsen av 1900-tallet.

1.3 Å lære å undervise geometri

Geometriens historie, fra praktiske målinger og beregninger i oldtidens Egypt og Babylon til Euklids logisk-deduktive framgangsmåte, viser til en iboende dobbelthet i faget. Når en elev lærer geometri, settes det praktiske utgangspunktet inn i en mer formell og logisk ramme som gir kraftige matematiske verktøy, øker forståelsen og åpner for flere anvendelser.

For å legge til rette for elevers læring i geometri må du som lærer ha en god og dyp forståelse av faget. Mange har et godt grunnlag fra egen skolegang, men som lærer trenger du å se sammenhengene og mulighetene i geometrien på en mer helhetlig og systematisk måte, samtidig som du kobler dette til undervisning. Målsettingen er at denne boka skal hjelpe deg med begge deler.

KAPITTEL

2

Todimensjonale figurer

Geometri handler om former, figurer og rom. Dette har du hatt kjennskap til helt siden barneskolen, men som kommende matematikklærer må du lære deg å se dette kjente stoffet på en ny måte. Det er ikke nok å kjenne igjen trekanter og firkanter. Du må forstå dem presist og kunne forklare dem tydelig. I dette kapittelet starter vi med plangeometri. Vi lever i en tredimensjonal verden, og elevene har med seg erfaring derfra. Likevel begynner man i skolen ofte med plangeometri, en todimensjonal verden. Du skal utvikle et språk for å beskrive former og lære hvordan du kan hjelpe elevene dine til å gjøre det samme. Når du leser dette kapittelet, håper vi at du vil få et mer presist språk for å tenke på og kommunisere om plane geometriske figurer. Hvis du er usikker på forskjellen mellom et trapes og en rombe, må du for eksempel friske opp akkurat den kunnskapen – og visste du at et kvadrat er et spesialtilfelle av en rombe? Hvis ikke bør du se nærmere på definisjonene av kvadrat og rombe, og arbeide med å forstå hvordan de henger sammen.

Plane geometriske figurer kjennetegnes ved at de brer seg ut i to retninger, de har bare utstrekning i ett plan. De vil aldri kunne gi en skygge slik romfigurer gjør. Når vi bruker et koordinatsystem, ser vi dette ved at vi har en x-retning og en y-retning. Derfor sier vi at plane geometriske figurer er todimensjonale.

2.1 Punkter og linjer

Barn utvikler tidlig en forståelse av rom og former gjennom lek og erfaringer i omgivelsene sine. Likevel bygger skolegeometri på mer presise og abstrakte begreper enn det barn naturlig tar i bruk. For å kunne analysere og beskrive figurer nøyaktig, trenger vi et felles språk som starter med de mest grunnleggende ideene og definisjonene. Punkt og linje er slike bygge-steiner, og de danner utgangspunktet for videre arbeid med geometri.

Begrepet *punkt* er grunnleggende i geometrien. Matematisk sett er et punkt det enkleste geometriske objektet, det representerer en posisjon uten utstrekning. Slike objekter finnes ikke i den fysiske virkeligheten, så begrepet punkt er et resultat av idealisering. Når en by tegnes inn på et kart over et større område, framstår byen bare som en prikk på kartet. Når vi ser på byer eller andre fysiske objekter som punkter, er vi ikke opptatt av størrelsen deres, men bare av posisjonen. Vi kan for eksempel forestille oss en trekant der Bergen, Oslo og Trondheim utgjør hjørnene.

Elever synes ofte det er vanskelig å forstå at punkter i matematikken ikke har noen utstrekning, for når de tegner punkter på arket, ser et punkt alltid ut som en liten prikk:



Figur 1
Tegning av punkter

I matematikken finnes uendelig mange punkter mellom punktene A og B. Elever tror derimot ofte at det bare finnes et endelig antall, fordi det ikke er plass til å tegne flere.

Punkt
Et punkt er en posisjon i planet eller rommet som verken har lengde, areal eller volum.

Når vi tegner et punkt i geometri, illustreres det altså med en liten prikk (ofte en fylt sirkel), og vi navngir det med en stor bokstav, for eksempel A. Det er viktig å være klar over at denne prikken bare er en hjelp for øyet, i teorien har punktet ingen størrelse. Matematisk sier vi at et punkt er et 0-dimensjonalt geometrisk objekt.

I et koordinatsystem kan vi tenke på et punkt som et tallpar som angir hvor i planet punktet er plassert, med en x-koordinat og en y-koordinat. Den franske matematikeren og filosofen René Descartes, som levde på 1600-tallet, bidro til at koordinatsystemer ble viktige i geometri. Dette var revolusjonerende fordi geometri og algebra ble bundet sammen. Studiet av geometri ved hjelp av koordinater, algebra og funksjonslære kalles analytisk geometri. Til ære for Descartes bruker vi begrepet «det kartesiske planet».

Et punkt i koordinatsystemet er entydig gitt av sine koordinater som angir avstandene til aksene. Et todimensjonalt koordinatsystem har en x-akse og en y-akse, og disse står vinkelrett på hverandre. Vanligvis er det x-aksen som er den horisontale aksen, og den kalles også for førsteaksen. På samme måte er y-aksen vanligvis den vertikale aksen og kalles også andreaksen. Koordinataksene deler det kartesiske planet i fire områder som kalles første, andre, tredje og fjerde kvadrant.