Matematikk for fagskolestudenter

Sigbjørn Hals, Inge Hoven Brakestad, Soldis Årseth Trippestad og Olav Løvøen

Matematikk for fagskolestudenter

CAPPELEN DAMM AKADEMISK

© CAPPELEN DAMM AS, Oslo, 2026

ISBN 978-82-02-91281-9

1. utgave, 1. versjon E-utgaven baserer seg på 1. trykte utgave, 2026

Elektronisk tilrettelegging: Cappelen Damm AS
Illustrasjoner og foto: Forfatterne, dersom ikke annet er oppgitt. Smilefjes på grubleoppgaver © Yayayoyo / iStock / Getty Images Plus
Omslagsdesign: Anna Salander
Sats: Have a Book

Materialet i denne publikasjonen er omfattet av åndsverklovens bestemmelser. Uten særskilt avtale med forlaget er enhver eksemplarfremstilling og tilgjengeliggjøring bare tillatt i den utstrekning det er hjemlet i lov eller tillatt gjennom avtale med Kopinor, interesseorgan for rettighetshavere til åndsverk. Enhver bruk av hele eller deler av utgivelsen som input eller som treningskorpus i generative modeller som kan skape tekst, bilder, film, lyd eller annet innhold og uttrykk, er ikke tillatt uten særskilt avtale med rettighetshaverne.

Bruk av utgivelsens materiale i strid med lov eller avtale kan føre til inndragning, erstatningsansvar og straff i form av bøter eller fengsel.

Cappelen Damm arbeider for å redusere miljøbelastningen fra våre bøker så mye som mulig. Les mer om Cappelen Damms miljøarbeid på
https://cappelendamm.no/baerekraft

www.cda.no
akademisk@cappelendamm.no

Innhold

Innledning ... 8

Nyttige forkunnskaper ... 10
I. Nytteverdien av å kunne bruke smarte strategier for hoderegning ... 10
II. Nytteverdien av å kunne regne ved hjelp av bokstaver ... 10
III. Nytteverdien av å kunne bruke digitale hjelpemidler på en effektiv måte ... 12

Kapittel 1
Tall og algebra ... 15
1.1 Regnerekkefølge ... 17
1.2 Ulike typer tall ... 21
1.3 Algebraiske uttrykk ... 27
1.4 Brøk ... 33
1.5 Prosent og vekst ... 42
1.6 Regneregler for potenser ... 49
1.7 Kvadratrot og røtter av høyere orden ... 56
1.8 Tall på standardform og som teknisk notasjon ... 61
1.9 Kvadratsetningene og konjugatsetningen ... 67
Sammendrag av kapittel 1 ... 70

Kapittel 2
Likninger, formler og ulikheter ... 75
2.1 Enkle førstegradslikninger ... 77
2.2 Førstegradslikninger med brøk ... 86
2.3 Formler ... 91
2.4 Lineære ulikheter ... 103
2.5 Faktorisering ... 106
2.6 Andregradslikninger ... 110
2.7 Andregradsulikheter ... 119
Sammendrag av kapittel 2 ... 125

Kapittel 3
Geometri ... 127
3.1 Omgjøring mellom enheter ... 129
3.2 Omkrets, areal og volum ... 133

3.3 Formlike figurer ... 141
3.4 Målestokk ... 144
3.5 Pytagorassetningen ... 150
Sammendrag av kapittel 3 ... 155

Kapittel 4
Trigonometri ... 159
4.1 Sinus, cosinus og tangens ... 161
4.2 Arealsetningen, sinussetningen og cosinussetningen ... 173
4.3 Enhetssirkelen ... 187
4.4 Vinkelmålene radianer og gon ... 194
Sammendrag av kapittel 4 ... 204

Kapittel 5
Rette linjer ... 207
5.1 Koordinatsystemet ... 209
5.2 Lineære funksjoner ... 210
5.3 Lineære likningssett ved regning ... 222
5.4 Grafisk løsning av lineære likningssett ... 228
5.5 Lineær regresjon ... 231
5.6 Vektorer ... 238
5.7 Vektorer i koordinatsystemet ... 243
5.8 Skalarproduktet og vinkler mellom vektorer ... 247
Sammendrag av kapittel 5 ... 252

Kapittel 6
Polynomfunksjoner ... 255
6.1 Hva er en polynomfunksjon? ... 257
6.2 Andregradsfunksjoner ... 258
6.3 Nullpunkt og ekstremalpunkt ... 261
6.4 Polynomfunksjoner av høyere grad ... 280
Sammendrag av kapittel 6 ... 288

Kapittel 7
Derivasjon og integrasjon ... 291
7.1 Gjennomsnittlig vekstfart ... 293
7.2 Momentan vekstfart og den deriverte ... 301
7.3 Derivasjon av polynomfunksjoner ... 307
7.4 Praktisk bruk av derivasjon ... 316
7.5 Integralregning ... 324
Sammendrag av kapittel 7 ... 337

Kapittel 8
Eksponentialfunksjoner og logaritmer ... 341
8.1 Eksponentialfunksjoner ... 343
8.2 Logaritmer og eksponentiallikninger ... 355
8.3 Logaritmisk skala ... 365
8.4 Eulertallet *e* ... 371
8.5 Den naturlige logaritmen ln(*x*) ... 377
8.6 Logistisk vekst ... 383
8.7 Eksponentiell og logistisk regresjon ... 388
Sammendrag av kapittel 8 ... 396

Kapittel 9
Statistikk ... 401
9.1 Sentralmål og spredningsmål for ugrupperte data ... 403
9.2 Sentralmål og spredningsmål for grupperte data ... 415
9.3 Grafisk visning av statistikk ... 426
Sammendrag av kapittel 9 ... 439

Kapittel 10
Utdypende om trigonometri og komplekse tall ... 441
10.1 Sinusfunksjonen ... 443
10.2 Enkle trigonometriske likninger ... 449
10.3 Komplekse tall ... 457
10.4 Det komplekse planet og regning med komplekse tall ... 462
10.5 Komplekse tall på polar form ... 469
10.6 Anvendelse av komplekse tall i vekselstrømskretser ... 480
Sammendrag av kapittel 10 ... 497

Kapittel 11
Totallsystemet og logiske kretser ... 503
11.1 Andre tallsystem ... 505
11.2 Grunnleggende om logiske kretser ... 514
11.3 Logiske kretser, boolsk algebra og proposisjonslogikk ... 523
11.4 Boolsk algebra og proposisjonslogikk med digitale hjelpemidler ... 530
Sammendrag av kapittel 11 ... 534

Fasit ... 537

Stikkord ... 583

Innledning

I denne boka er det lagt mest vekt på at matematikken skal være et redskapsfag som du har nytte av i andre fagområder. Målet er at du skal lære og forstå de grunnleggende prinsippene, og kunne bruke denne kunnskapen til å utføre praktiske beregninger.

Omfanget av boka

Boka er på knappe 600 sider, men det er ikke meningen at studentene skal lære alt dette. Fagskolen har flere ulike retninger, og boka dekker derfor mange temaer. Det gjør at læreren kan velge ut de kapitlene og det fagstoffet som er relevant for hver enkelt fagretning. For eksempel er kapittel 10 og 11 satt med en grønn ramme, da de bare er for studenter som tar elektrofag.

Progresjonen og oppbyggingen av læreverket

Alle forfatterne av denne boka underviser eller har tidligere undervist i matematikk i fagskolesektoren. Vi kjenner derfor godt til hva du som student har bruk for av matematikk i andre fagfelt. Vi vet også at for noen er det lenge siden de hadde matematikk som fag på skolen. For at alle skal henge med fra starten av, begynner vi derfor med det helt grunnleggende, som de fire regnearten, hva en brøk er, og enkel prosentregning. Om du føler at du trenger litt repetisjon før skoleåret starter, vil vi anbefale et digitalt repetisjonskurs som er utviklet av forlaget. Her finner du korte forklarende filmer og interaktive oppgaver der du får tips underveis, og får vite med det samme om du har regnet riktig eller ikke.

I starten av hvert kapittel er det en punktvis liste over hva du skal lære, og en tilsvarende liste over nyttige forkunnskaper. Hvert kapittel blir avsluttet med en systematisk oppsummering av det viktigste innholdet.

Det er også QR-koder og lenker til forklarende filmer og interaktive apper i selve læreboka. Vi er opptatt av at du skal få en grundig forståelse av hvordan

de ulike delene av faget henger sammen. For noen kan det være lettere å se slike sammenhenger i en illustrerende film eller i en app der du trygt kan utforske, prøve og feile selv.

Vi har samlet mye spennende fordypningsstoff bak lenker og QR-koder for deg som er spesielt interessert og nysgjerrig. Her får du møte andre sider av matematikkfaget og kan blant mye annet besøke Hilberts hotell med uendelig mange rom, og få svar på spørsmål som dette: «Kan kunnskap om irrasjonale tall føre til mord?»

Digitale hjelpemidler

I jobbsammenheng og i dagliglivet ellers har du som regel tilgang på et hjelpemiddel som gjør at du sparer tid ved større utregninger. I denne boka viser vi hvordan du kan løse de ulike oppgavene med GeoGebra og med to kalkulatorer fra Casio. Det er den grafiske kalkulatoren fx-CG50 og den litt enklere modellen fx-991 CW. Vi viser også bruken av regnearket Excel og en del gode og nyttige nettbaserte digitale verktøy.

Eksempler, fasit og fullstendige løsningsforslag

Alt nytt lærestoff blir grundig forklart gjennom oversiktlige eksempler, der vi viser trinnvise løsninger av mange eksempeloppgaver. I hvert delkapittel er det et rikt utvalg av oppgaver, og helt bakerst i boka finner du en fasit til alle disse oppgavene. Det er også laget et eget løsningsforslag til boka. Løsningsforslagsboka gir grundige og detaljerte steg-for-steg-løsninger til samtlige av oppgavene i *Matematikk for fagskolestudenter*. Mange av oppgavene er løst på flere måter og med de samme digitale hjelpemidlene som er brukt i hovedboka. Du finner også løsningsforslag til oppgavene som ligger som tilleggsstoff bak QR-koder og lenker. Det er lurt å studere teorien og eksemplene grundig før du jobber med oppgavene. Du kan se i fasiten om du har tenkt og regnet riktig. Dersom svaret ikke stemmer, eller du er usikker på hvordan oppgaven skal løses, kan du studere løsningsforslagene slik at du forstår framgangsmåten og kan løse tilsvarende oppgaver på egen hånd senere.

Mars 2026
Sigbjørn Hals, Inge Hoven Brakestad, Soldis Årseth Trippestad og Olav Løvøen

Nyttige forkunnskaper

Før du starter på det første kapittelet i denne boka, vil vi gjerne at du bruker noen minutter på å se på nytteverdien av tre viktige ferdigheter. Disse ferdighetene vil du få bruk for både i dette kurset og i jobbsammenheng. De tre ferdighetene er:

I. å kunne bruke smarte strategier for hoderegning
II. å kunne regne ved hjelp av bokstaver
III. å kunne bruke digitale hjelpemidler på en effektiv måte

Vi vil nå se på nytteverdien av disse tre ferdighetene etter tur.

I. Nytteverdien av å kunne bruke smarte strategier for hoderegning

Det finnes mange smarte strategier som kan gjøre det enklere og raskere å regne i hodet. Du kan spare mye tid på prøver og i hverdagen hvis du bruker metodene vi viser via QR-koden nedenfor.



Skann QR-koden for å komme til et lite hefte (tre sider) med smarte strategier for hoderegning.

Du vil finne flere slike QR-koder gjennom hele boka. Ved å skanne disse kan du få tilgang til artikler eller korte filmer som ikke nødvendigvis er «pensum» på den linja du har valgt. De vil likevel kunne bidra til å gi en dypere innsikt i stoffet, eller bare være interessante opplysninger for deg som liker å vite litt mer.

II. Nytteverdien av å kunne regne ved hjelp av bokstaver

Nå kan du bruke de smarte strategiene du lærte til å løse en enkel hoderegningsoppgave. Når du har gjennomført denne, vil det være lettere å forstå nytteverdien av å kunne regne med bokstaver.

Regning med bokstaver blir kalt **algebra**. Det er nyttig når vi skal lage formler eller bevise matematiske sammenhenger.

- Tenk på et tall.
- Legg til 4.
- Doble svaret. (Gang med to.)
- Trekk fra 2.
- Halver svaret. (Del på to.)
- Trekk fra tallet du tenkte på.

Hvilket tall fikk du til svar?
Start med et annet tall og gjennomfør den punktvise utregningen ovenfor en gang til. Får du det samme svaret nå også?

Om du prøver mange ganger og regner riktig hver gang, vil du alltid ende opp med det samme svaret. Hvorfor er det slik? Kan vi være helt sikre på at det ikke finnes et eneste starttall som gjør at vi ender opp med et annet svar til slutt?

Uansett hvor mange ganger vi prøver, og uansett hvor mange eksempler vi kan gi på at vi ender opp med svaret 3, så har vi ikke bevist at det vil være slik. Det kan vi derimot gjøre om vi bruker et symbol for tallet vi starter med. La oss først lage en tegning der vi lar tallet vi tenker på, være symbolisert av en liten firkant, og tallet 1 være gitt ved en loddrett strek. Da kan det se slik ut:

Framgangsmåte	**Med tegning**
Tenk på et tall.	■
Legg til 4.	■ ||||
Doble svaret.	■ |||| ■ ||||
Trekk fra 2.	■ ||| ■ |||
Halver svaret.	■ |||
Trekk fra tallet du tenkte på.	|||

Det blir upraktisk å tegne streker og firkanter når tallene er store. Siden det ukjente tallet kan variere, kaller vi det en variabel. I matematikken bruker vi ofte bokstaver for å symbolisere en variabel. Hvis vi bruker bokstaven x for tallet vi tenkte på, og tall i stedet for streker, blir utregningen slik:

Framgangsmåte	Med tegning	Med variabelen x
Tenk på et tall.	■	x
Legg til 4.	■ ||||	$x + 4$
Doble svaret.	■ |||| ■ ||||	$2x + 8$
Trekk fra 2.	■ ||| ■ |||	$2x + 6$
Halver svaret.	■ |||	$x + 3$
Trekk fra tallet du tenkte på.	|||	3

Ved å ta i bruk bokstavregning har vi klart å bevise at uansett hvilket tall vi starter med, vil vi alltid ende opp med svaret 3 når vi gjennomfører disse utregningene.

III. Nytteverdien av å kunne bruke digitale hjelpemidler på en effektiv måte

Mange av oppgavene vi skal løse, både som studenter og i arbeidslivet, er det vanskelig å løse med hoderegning. De store leverandørene av maskiner har ofte egne nettsider eller apper som vi kan laste ned, der vi kan få hjelp til å finne ukjente verdier i formler som er knyttet til bruken av maskinene. Bildet nedenfor viser et eksempel på en slik nettside. Du kan gå inn på denne nettsiden ved å skanne QR-koden eller skrive inn den tilsvarende nettadressen, https://www.secotools.com/article/84610



Men ofte har vi også bruk for mer fleksible digitale hjelpemidler i utregninger, og til å få vist grafer av funksjoner vi jobber med.

I denne boka har vi valgt å presentere framgangsmåter for løsninger med tre slike hjelpemidler. Det er GeoGebra og de to kalkulatorene Classwiz fx-991 CW og fx-CG50 fra Casio. fx-CG50 er en grafisk kalkulator. Menyvalgene og tastetrykkene er omtrent de samme på eldre modeller, som for eksempel fx-9860 GIII.

De fleste som ikke bruker grafisk kalkulator, foretrekker å tegne grafer med GeoGebra og overføre grafer og utregninger derfra til dokumentet med besvarelsen. Sjekk med skolen hvilke digitale hjelpemidler som blir brukt der.

Dersom du ønsker en kort innføring i hvordan du laster ned og tar i bruk de viktigste verktøyene i GeoGebra, kan du skanne QR-koden i margen og se en film som forklarer dette. Du kan også skrive inn nettadressen https://qr.capdam.no/r/Lk_KiXsMSE

Vi forklarer hvordan de forskjellige hjelpemidlene brukes i løsningen av ulike oppgavetyper, senere i boka.

Lykke til!



© Petrovich9 / iStock / Getty Images Plus

1

Tall og algebra

Matematikk er viktig i hverdagen og i de fleste yrker. På fagskolen er det et redskapsfag som også brukes i andre fag. Gjør du en god innsats her, har du større sjanse til å lykkes i andre fag og i yrkeslivet.

I dette kapittelet skal vi forklare og jobbe med grunnleggende matematikk og tallbehandling. Det vi lærer her, er nyttig for resten av boka, og det er derfor lurt å bruke tid på å lære innholdet i dette kapittelet grundig.

I kapittel 1 får du lære dette:

- Å vite i hvilken rekkefølge vi regner ut uttrykk som inneholder pluss, minus, ganging, deling, potenser og parenteser.
- Å bruke smarte metoder for hoderegning.
- Å finne brøkdelen av et tall.
- Å se nytten av å ta i bruk algebra.
- Å faktorisere tall og algebraiske uttrykk.
- Å regne om mellom brøk, desimaltall og prosent.
- Å forenke uttrykk med brøker.
- Å vite forskjellen mellom prosent og prosentpoeng.
- Å finne noen enkle prosenter av et tall med hoderegning.
- Å regne med prosentvis vekst og prosentvis nedgang.
- Å regne med tall på standardform.
- Å bruke noen setninger som er nyttige ved forenkling av algebraiske uttrykk.
- Å løse oppgaver med tall og algebra med digitale hjelpemidler.

Nyttige forkunnskaper:

- Å vite at en potens består av et grunntall og en eksponent.
- Å vite at i potensen 2^3 er grunntallet 2 og eksponenten 3.
- Å vite at når det står 2^3, betyr det at grunntallet 2 skal ganges med seg selv tre ganger.
  $2^3 = \overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}^{\text{tre ganger}} = 8.$
- Å vite at svaret blir positivt når vi multipliserer to negative tall. For eksempel er $(-7) \cdot (-3) = 21$.
- Å vite at $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$, og at $-5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$.
- Å vite at i en brøk er telleren på toppen og nevneren nede. $\frac{3}{4}$ ← Teller, ← Nevner
- Å kunne gange et tall med 10, 100 og 1000 i hodet.
- Å kunne dele et tall med 10, 100 og 1000 i hodet.
- Å vite at vi kaller tall eller bokstavuttrykk med + eller – mellom for *ledd*.

  $\underbrace{5}_{\text{ledd}} + \underbrace{3}_{\text{ledd}} = \underbrace{8}_{\text{sum}}$
- Å vite at vi kaller tall eller bokstavuttrykk med gangetegn mellom for *faktorer*.

  $\underbrace{5}_{\text{faktor}} \cdot \underbrace{3}_{\text{faktor}} = \underbrace{15}_{\text{produkt}}$



Hvorfor er det slik at når vi multipliserer to negative tall, blir svaret positivt?

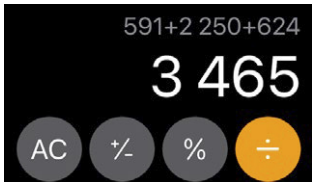
1.1 Regnerekkefølge

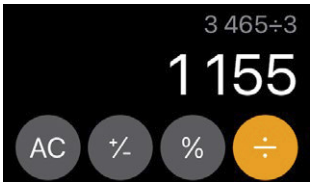
Nå som du har sett hvilke forkunnskaper om tall og regning dette kapittelet bygger på, skal vi se på rekkefølgen vi må følge når vi regner uttrykk med flere regnearter.

De tre studentene Ada, Bjørn og Christian dro på byen en kveld. Ada betalte 591 kroner for drosjen den ene veien. Bjørn betalte 2250 kroner for den felles restaurantregningen og Christian betalte 625 kroner for drosjeturen hjem. De ble enige om å dele utgiftene likt, og Christian brukte kalkulatoren på mobilen sin for å regne ut hvor mye det ble på hver.



Men det kan da ikke stemme, sa Ada. *Det blir jo over ni tusen kroner til sammen! Vi må legge sammen utgiftene før vi deler.*

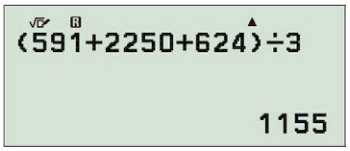




Dette er for tungvint, sa Bjørn. *Vi bruker heller oppgjør-funksjonen i Vipps.*

Hadde studentene brukt den vitenskapelige varianten av mobilkalkulatoren, eller en annen avansert kalkulator, kunne de ha satt en parentes rundt tallene som skulle legges sammen.





Denne historien viser at rekkefølgen på utregningene er viktig. Matematikere har derfor kommet fram til noen faste regler for dette.

For at alle skal få samme svar når vi regner det samme regnestykket, er det bestemt at vi skal regne i denne rekkefølgen:

1. Parenteser
2. Potenser
3. Multiplikasjon og divisjon
4. Addisjon og subtraksjon

Eksempel 1.1.1

Regn ut $3+2\cdot 4$.

$3+8$	Først multiplikasjon: $2\cdot 4=8$.
11	Så addisjon: $3+8=11$.

Eksempel 1.1.2

Regn ut $(-6)^2-(12+3)$.

$(-6)^2-(15)$	Først parentesen: $12+3=15$
$36-15$	Så potensen: $(-6)^2=36$
21	Til slutt subtraksjon: $36-15=21$

Eksempel 1.1.3

Regn ut $-3\cdot(2+1)-(6-2):2+4\cdot 3^2$.

$-3\cdot 3-4:2+4\cdot 3^2$	Først parentesene: $2+1=3$ og $6-2=4$.
$-3\cdot 3-4:2+4\cdot 9$	Så potensen: $3^2=3\cdot 3=9$.
$-9-2+36$	Så er det multiplikasjon og divisjon.
25	Til slutt er det addisjon og subtraksjon.

Oppgave 1.1.1

Regn ut.

a) $4\cdot 4-5\cdot 3$

b) $7\cdot(8-4)-5^2$

c) $3^2+2(15-2^3)+(3\cdot 4^2-5^2)$

Oppgave 1.1.2

Regn ut.

a) $(-5)^2+(7-3)$ b) $-5^2+(7-3)$

Når vi har likeverdige regneoperasjoner, regner vi fra venstre mot høyre. Når det bare er addisjon eller bare multiplikasjon, spiller ikke rekkefølgen noen rolle.

Eksempel 1.1.4

Regn ut $10-3+2$.

$7+2$	Vi starter fra venstre: $10-3=7$.
9	$7+2=9$.

Eksempel 1.1.5

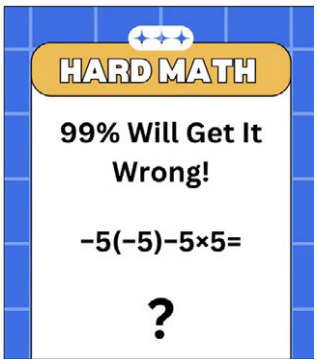
Regn ut $18:3\cdot 2$.

$6\cdot 2$	Vi starter fra venstre: $18:3=6$.
12	$6\cdot 2=12$.

Oppgave 1.1.3

a) Regn ut $6:2(1+2)$.

b) På sosiale medier dukker det av og til opp regnestykker som dette:



Nå har du lært om regnerekkefølge. Kan du være en av de få som får riktig svar?

Oppgave 1.1.4

Hvorfor får vi feil svar dersom vi regner denne oppgaven slik det er vist nedenfor?

$$\frac{5+4}{2+1}=5+4:2+1=5+2+1=8.$$

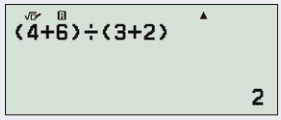
Det som står i telleren i en brøk hører sammen. Det samme gjelder det som står i nevneren. Vi har derfor to muligheter når vi skal regne ut verdien av brøken:

1. Vi kan regne ut verdien av telleren og verdien av nevneren hver for seg.

   Eksempel: $\frac{4+6}{3+2}=\frac{10}{5}=2$

2. Vi kan sette en parentes rundt telleren og en parentes rundt nevneren og bruke delingstegn for brøkstreken. Så kan vi skrive uttrykket inn på en kalkulator eller regne det ut i hodet, dersom det er enkle uttrykk som dette.

   Eksempel: $\frac{4+6}{3+2}=(4+6):(3+2)=2$

   Her ser vi tydelig verdien av reglene for regnerekkefølge, med parenteser først.

Oppgave 1.1.5

Regn ut uten bruk av digitale hjelpemidler.

a) $\frac{5+9}{3+4}$ b) $\frac{4+2\cdot 6}{3^2+7}$

Oppgave 1.1.6

Regn ut uten bruk av digitale hjelpemidler.

a) $5+4\cdot 3-2$ b) $(7-2)^2+3$

c) $8:2(3+1)$ d) $(-3)\cdot(2-3)+4$

e) $6-3+2^3$

Oppgave 1.1.7

Regn fra venstre mot høyre, siden det er likeverdige operasjoner.

a) $12:4\cdot 2$

b) $15-5+2$

Oppgave 1.1.8

Regn ut uten bruk av digitale hjelpemidler.

$(3+5)\cdot 2^3-6:3$

Oppgave 1.1.9

Regn ut uten bruk av digitale hjelpemidler.

a) $(4+2)\cdot(5-3)$

b) $2+(3\cdot(4-1))$

Oppgave 1.1.10

$1=(3:3)\cdot(3:3)$

$2=(3:3)+(3:3)$

$3=3\cdot 3-3-3$

…

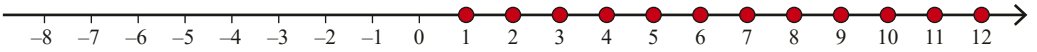
Kan du lage de neste hele tallene 4, 5, 6, 7, 8, 9 og 10 på tilsvarende måte som vist ovenfor, ved hjelp av fire 3-tall, de fire regneartene og parenteser (når du har bruk for det)?

Finnes det flere måter du kan bruke for å lage det samme tallet?

1.2 Ulike typer tall

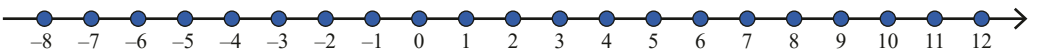
Hittil har vi for det meste regnet med hele positive tall. Disse kaller vi *de naturlige tallene*, og de har symbolet $\mathbb{N}$.

$\mathbb{N}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$



Om vi også tar med 0 og de hele negative tallene, får vi *de hele tallene.* Disse har symbolet $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z}=\{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\ \ldots\}$



Det finnes uendelig mange naturlige tall og uendelig mange hele tall.

Når vi ser på plasseringen av tallene på tallinjene overfor, kan det se ut som at det er dobbelt så mange hele tall som det er naturlige tall (når vi ser bort fra 0). Men er det kanskje heller slik at det er like mange av hver sort, siden det er uendelig mange av begge? Om du skanner QR-koden til høyre, får du bli med til Hilberts hotell for å få svar på dette spørsmålet.



Vi kan addere, subtrahere og multiplisere de hele tallene med hverandre og får da alltid et helt tall til svar. Dersom vi deler et helt tall på et annet, er det derimot ikke sikkert at svaret blir et helt tall. For eksempel er $2:8=\frac{1}{4}$.

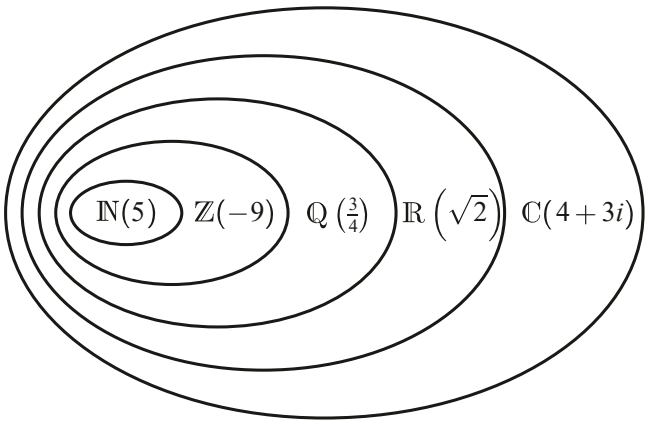
Svaret blir ikke et helt tall. Vi skriver tallet som en brøk med telleren over brøkstreken og nevneren under. Vi kaller hele tall og brøker der telleren og nevneren er hele tall for *rasjonale tall*. Rasjonale tall har symbolet $\mathbb{Q}$.

Et tall som derimot ikke kan skrives som en brøk, kaller vi for et *irrasjonelt tall*. Et eksempel på et irrasjonelt tall er $\sqrt{2} \approx 1,4142136$. Svaret er bare en tilnærmingsverdi. Uansett hvor mange desimaler vi tar med, får vi aldri helt riktig verdi. Det finnes altså ingen brøk med hele tall i teller og nevner som tilsvarer $\sqrt{2}$. Andre eksempler på irrasjonale tall er $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ og π. $\sqrt{4}=2$ og $\sqrt{9}=3$, er derimot ikke irrasjonale tall.



Kan kunnskap om irrasjonale tall føre til mord?

Mengdene av naturlige tall, hele tall, rasjonale tall og irrasjonale tall er samlet i mengden som blir kalt for *reelle tall* med symbolet $\mathbb{R}$. Vi har også en tallmengde som har fått navnet *komplekse tall*, med symbolet $\mathbb{C}$. Disse er på formen $a+b\cdot i$, der i står for $\sqrt{-1}$. Du har kanskje lært at vi ikke kan ta kvadratroten av et negativt tall, men det gjelder når vi holder oss til de reelle tallene. Vi skal lære mer om komplekse tall i et senere kapittel. Figuren nedenfor viser de ulike mengdene av tall, med et eksempel fra hver av disse.



Partall er hele tall som gir et helt tall til svar når det deles på 2. Eksempler på partall er –4, 2, 6 og 18. *Oddetall* er hele tall som ikke er partall. Eksempler på oddetall er –5, 1, 7 og 11.

Primtall er tall som er større enn 1, og som bare kan deles på seg selv og 1. De ti første primtallene er 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 og 29. Det er viktig å kjenne til primtallene når vi jobber med faktorisering og forkorting.

Vi bruker symbolet $\in$ for å vise at et tall er med i en mengde, og $\notin$ som symbol for at et tall ikke er med i en mengde. For eksempel: $\frac{2}{5} \in \mathbb{Q}$, $\frac{2}{5} \notin \mathbb{N}$. Vi leser dette slik: «To femtedeler er element i de rasjonale tallene, men er ikke element i de naturlige tallene.»

Oppgave 1.2.1

Sett inn ett av symbolene $\in$ eller $\notin$ i de tomme rutene mellom tallene og mengdesymbolene nedenfor.

a) -7 ☐ $\mathbb{N}$

b) -7 ☐ $\mathbb{Z}$

c) $\sqrt{3}$ ☐ $\mathbb{R}$

d) $\sqrt{3}$ ☐ $\mathbb{Q}$

e) $\sqrt{4}$ ☐ $\mathbb{N}$

Oppgave 1.2.2

Kryss av for hvilke tallmengder hver av disse tallene er med i.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-3	☐	☐	☐	☐
4,5	☐	☐	☐	☐
$\sqrt{5}$	☐	☐	☐	☐
0	☐	☐	☐	☐
π	☐	☐	☐	☐

Om du ikke vil skrive av tabellen, kan du skanne QR-koden i margen eller skrive inn lenken https://qr.capdam.no/r/ElgAer-Ese

Addisjon og multiplikasjon med hele positive tall

Når vi skal legge sammen to tall, har ikke rekkefølgen noe å si. For eksempel er både $3+5$ og $5+3$ lik 8.

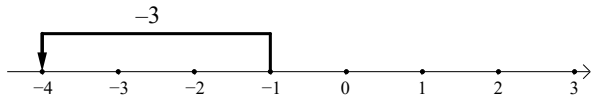
På samme måte som ved addisjon har ikke rekkefølgen noe å si for svaret når vi ganger to tall. For eksempel er både $3 \cdot 5$ og $5 \cdot 3$ lik 15.

Addisjon og subtraksjon med hele negative tall

Eksempel 1.2.1

Regn ut $-1-3$.

$-1-3=-4$

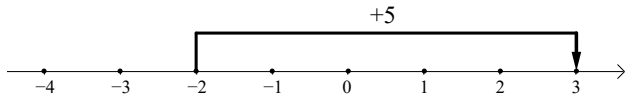


Når vi trekker fra et positivt tall eller legger til et negativt tall, beveger vi oss mot venstre på tallinja.

Eksempel 1.2.2

Regn ut $-2+5$.

$-2+5=3$



I mange praktiske situasjoner er det slik at når vi tar bort noe negativt, blir resultatet mer positivt. Når vi trekker fra et negativt tall, beveger vi oss lenger til høyre på tallinja.

Eksempel 1.2.3

Regn ut $8-(-3)$.

$8+3=11$

$8-(-3)=11$ To minustegn etter hverandre er det samme som et plusstegn.

Når vi legger til noe negativt, blir resultatet mer negativt.

Eksempel 1.2.4

Regn ut $-5+(-3)$.

$-5-3=-8$

$-5+(-3)=-11$ Et plusstegn etterfulgt av et minustegn er det samme som et minustegn.

Når vi trekker fra noe positivt, blir resultatet mer negativt.

Eksempel 1.2.5

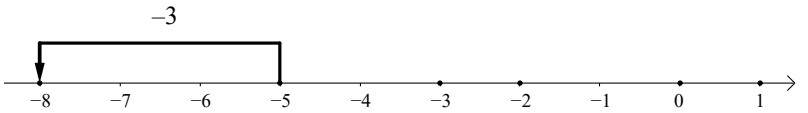
Regn ut $-5-(+3)$.

$-5-3=-8$

$-5-(+3)=-8$ Et minustegn etterfulgt av et plusstegn er det samme som et minustegn.

Du har kanskje hørt noen si at «minus og minus gir pluss». Det er feil, og den «regelen» må vi bare glemme. I eksempelet ovenfor blir jo ikke $-5-3$ til svaret $+8$.

Vi starter med -5 på tallinja og går tre enheter lenger til venstre. Da kommer vi til -8.



Det som er riktig, er at et negativt tall multiplisert med et negativt tall blir et positivt tall. $(-5)\cdot(-3)=+15$. Dersom du lurer på hvorfor det blir slik, kan du lese forklaringen på det ved å skanne QR-koden nederst på side 16.

Vi skal nå se litt nærmere på reglene som gjelder ved multiplikasjon og divisjon med negative tall.

Multiplikasjon og divisjon med negative tall

Vi har tilsvarende regler for multiplikasjon og divisjon med negative tall.

Regneregel	Kortform
Positivt tall · positivt tall = positivt tall	+ · + = +
Positivt tall · negativt tall = negativ tall	+ · − = −
Negativt tall · positivt tall = negativt tall	− · + = −
Negativt tall · negativt tall = positivt tall	− · − = +

Eksempel 1.2.6

Regn ut $2\cdot(-3)$.

$2\cdot(-3)=-6$ $\quad + \cdot - = -$

Eksempel 1.2.7

Regn ut $(-3)\cdot(-4)$.

$(-3)\cdot(-4)=12$ $\quad - \cdot - = +$

Eksempel 1.2.8

Regn ut $(-3)\cdot 2\cdot(-1)$.

$(-3)\cdot 2=-6$ $\quad - \cdot + = -$

$(-6)\cdot(-1)=6$ $\quad - \cdot - = +$

$(-3)\cdot 2\cdot(-1)=6$

De samme reglene gjelder også for divisjon.

Oppgave 1.2.3

Regn ut.

a) $-7-5$ b) $-7-(-5)$ c) $-7+(-5)$

Oppgave 1.2.4

Regn ut.

a) $(-5)\cdot 9$ b) $(-5)\cdot(-9)$ c) $(-5)\cdot(-9)\cdot(-1)$

Oppgave 1.2.5

Regn ut.

a) $18:(-3)$ b) $(-18):3$ c) $(-18):(-3)$

Oppgave 1.2.6

En morgen var temperaturen −5 °C. Ut på dagen steg temperaturen med åtte grader før det ble tre grader kaldere ut på kvelden. Hva var temperaturen da?

Oppgave 1.2.7

Du skal addere (legge sammen) fem positive og tre negative tall. Hvilket av svaralternativene nedenfor er riktig?

1. Summen blir alltid et positivt tall.
2. Summen blir alltid et negativt tall.
3. Det er størrelsen på tallene som avgjør om summen blir et positivt eller et negativt tall.

Oppgave 1.2.8
Du skal multiplisere (gange sammen) fem positive og tre negative tall. Hvilket av svaralternativene nedenfor er riktig?

1. Produktet blir alltid et positivt tall.
2. Produktet blir alltid et negativt tall.
3. Det er størrelsen på tallene som avgjør om produktet blir et positivt eller et negativt tall.

Oppgave 1.2.9
Bruk hvert av sifrene 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9 én gang, og plasser disse der understrekningene står, slik at svaret blir størst mulig.

$(__ - __) \cdot (__ + __) + __ \cdot __ - __ : (__ - __)$

Oppgave 1.2.10
Skriv opp alle primtallene som er mindre enn 30, uten bruk av hjelpemidler.

1.3 Algebraiske uttrykk

Noen synes det er vanskelig å regne med bokstaver, men da er det greit å vite at regnereglene er de samme som når vi regner med tall.

Forenkling av algebraiske uttrykk

Vi kan ha ulike variabler i det samme algebraiske uttrykket, og hver av disse kan være opphøyd i ulike eksponenter. Da trekker vi sammen ledd av samme type og samme potens. Et ledd er bokstavuttrykk eller tall med plusstegn eller minustegn mellom.

I uttrykket $4x + 2y + x - y$ er x og y *variabler.* Uttrykket inneholder fire *ledd*.

Vi kan trekke sammen ledd av samme type. Det blir ofte lettere å holde oversikten om vi sorterer uttrykket slik at ledd av samme type står etter hverandre før vi trekker sammen.

$$\begin{aligned} &4x + 2y + x - y \\ &= 4x + x + 2y - y \\ &= 5x + y \end{aligned}$$

Her er et annet eksempel:

$$\begin{aligned} &x^2 + 3x - 7 + 2x^2 + 10 \\ &= x^2 + 2x^2 + 3x - 7 + 10 \\ &= 3x^2 + 3x + 3 \end{aligned}$$