QED 5–10:
Tall og tallteori

Olav Gravir Imenes, Trude Sundtjønn, Reinert A. Rinvold,
Kristin Ran Choi Hinna og Trond Stølen Gustavsen

QED 5–10: Tall og tallteori

Matematikk for grunnskolelærerutdanningen

CAPPELEN DAMM AKADEMISK

© CAPPELEN DAMM AS, Oslo, 2025

ISBN 978-82-02-88415-4

1. utgave, 1. versjon 2026

E-utgaven tilsvarer 1. trykte utgave, Cappelen Damm Akademisk, 2025

Materialet i denne publikasjonen er omfattet av åndsverklovens bestemmelser.
Uten særskilt avtale med forlaget er enhver eksemplarfremstilling og tilgjengeliggjøring bare tillatt i den utstrekning det er hjemlet i lov eller tillatt gjennom avtale med Kopinor, interesseorgan for rettighetshavere til åndsverk. Enhver bruk av hele eller deler av utgivelsen som input eller som treningskorpus i generative modeller som kan skape tekst, bilder, film, lyd eller annet innhold og uttrykk, er ikke tillatt uten særskilt avtale med rettighetshaverne

Bruk av utgivelsens materiale i strid med lov eller avtale kan føre til inndragning, erstatningsansvar og straff i form av bøter eller fengsel.

Omslagsdesign: Merkur Grafisk AS
Sats: Merkur Grafisk AS (Vegard Brekke)

Første- og andreforfatter har mottatt støtte fra Norsk faglitterær forfatter- og oversetterforening (NFFO) til arbeidet med denne boka.

Boken er utgitt med støtte fra Kunnskapsdepartementet.

Cappelen Damm arbeider aktivt for å redusere miljøbelastningen fra våre utgivelser. Les mer om vårt miljøarbeid på https://cappelendamm.no/baerekraft

www.cda.no
akademisk@cappelendamm.no

Forord

Da QED 5–10 først ble utgitt i 2012, var det med ambisjonen om å tilby lærerutdanningen et helhetlig og faglig solid verk i matematikk. Siden den gang har både samfunnet, skolen og lærerutdanningen vært i kontinuerlig utvikling. Nye rammeplaner, endringer i skolen og faglige impulser har aktualisert behovet for en revisjon – og da dette arbeidet tok til, vokste ideen fram om å omstrukturere verket i fire tematiske bøker. Nå har denne ideen blitt til virkelighet, og vi har gleden av å presentere den første boka i den nye serien: *QED 5–10: Tall og tallteori*.

Serien vil etter hvert bestå av følgende bøker:

QED 5–10: Tall og tallteori

QED 5–10: Algebra og funksjoner

QED 5–10: Geometri og måling

QED 5–10: Statistikk og sannsynlighet

Til revisjonsarbeidet har vi fått med flere nye forfattere for å styrke og utvide den samlede kompetansen. Selv om mange av de opprinnelige styrkene og perspektivene er videreført, er bøkene i stor grad nyskrevne og tilpasset dagens behov i skolen og lærerutdanningen. Programmering i matematikk har fått en tydeligere plass, og det er lagt inn eksempler og oppgaver som viser hvordan dette kan integreres i undervisningen.

Et særtrekk ved *QED 5–10* har vært kombinasjonen av faglig grundighet og didaktisk refleksjon. I de nye bøkene er dette videreført og utviklet: Matematikkfaglige begreper og innsikter belyses i lys av undervisningskunnskap og elevers læring. Vi mener at dyp fagforståelse og god didaktikk henger tett sammen, og håper at bøkene vil bidra til å ruste framtidige lærere for et lærerikt og meningsfullt møte med matematikkundervisningen.

QED 5–10: Tall og tallteori er skrevet av Olav Gravir Imenes, Trude Sundtjønn, Reinert A. Rinvold, Kristin Ran Choi Hinna og Trond Stølen Gustavsen. Redaktørene vil rette en stor takk til Olav og Reinert for deres faglige styrke og grundige arbeid. Det har vært avgjørende for bokas faglige kvalitet.

Redaksjonsgruppa ønsker å takke seniorredaktør Bjørn Olav Aas Hansen, som har fulgt serien gjennom mange år med både tro og drivkraft, og som har vært en avgjørende støtte i revisjonsprosessen. Takk også til manusredaktør Bjørg Torhild Johnsen for stødig og strukturert oppfølging, til språkkonsulent Siv Rekve for grundig og språklig trygg gjennomgang og til Vegard Brekke for den grafiske utformingen. Vi vil også rette en takk til fagkonsulenter, kollegaer og lesere av de opprinnelige bøkene – og ikke minst studentene – som har gitt innspill og tilbakemeldinger som har bidratt til å forme denne nye utgaven.

Redaksjonsgruppa, Kristiansand, Drammen og Oslo

Kristin Ran Choi Hinna, Trond Stølen Gustavsen og Trude Sundtjønn (red.)

Innhold

Innledning **11**

Kapittel 1

Tall **17**
1.1 Hva er tall? 18
1.2 Et historisk blikk på tallsystemets utvikling 22
1.2.1 Additive tallsystemer 24
1.2.2 Siffersystemer 25
1.2.3 Multiplikative systemer 26
1.2.4 Posisjonssystemet 28
1.2.5 Titallsystemet og andre baser 30
1.2.6 Posisjonssystemer med andre baser 34
1.3 Det grunnleggende tallbegrepet 42
1.3.1 Kardinaltall 43
1.3.2 Kvantorer 45
1.3.3 Hvor mye eller hvor mange? 46
1.3.4 Ordinaltall 48
1.3.5 Etterfølgerprinsippet 49
1.3.6 Velordningsprinsippet 49
1.3.7 Læring av posisjonssystemet og tallord i ulike språk 50
1.4 Læring av tegn og begreper 54
1.4.1 Semiotikk 55
1.4.2 Læring av tegn og begreper 61
1.4.3 Representasjoner 65
1.4.4 Visualisering og konkretisering 69
1.4.5 Programmeringsspråk 75

Kapittel 2

Regneartene **77**
2.1 Addisjon 78
2.1.1 Telling og regnestrategier 79
2.1.2 Tankemodeller for addisjon 81
2.1.3 Regneregler for addisjon 83
2.1.4 Addisjonsmetoder 86
2.2 Subtraksjon 97

2.3 Multiplikasjon 106
2.3.1 Regneregler for multiplikasjon 111
2.3.2 Oppsatte multiplikasjoner og multiplikasjonstabellen 115
2.4 Divisjon 126
2.4.1 Delingsdivisjon og målingsdivisjon 126
2.4.2 Divisjon med rest 128
2.4.3 Tankemodeller for multiplikasjon og divisjon 133
2.4.4 Oppsatte divisjoner 134
2.4.5 Divisjon som motsatt operasjon til multiplikasjon 137
2.5 Regning med parenteser 143
2.6 Negative tall 150
2.7 Sammenhenger mellom de fire regneartene 160
2.8 Potensregning 162
2.8.1 Negative eksponenter 172
2.8.2 Standardform for tall 176

Kapittel 3 **Brøk 179**
3.1 Brøkers ulike betydninger 181
3.1.1 Ord og symboler for brøk på ulike språk 186
3.2 Ulike modeller for brøk 188
3.3 Likeverdige brøker 193
3.4 Sammenlikning av brøker 195
3.5 Addisjon og subtraksjon av brøk 200
3.6 Multiplikasjon av brøk 207
3.7 Divisjon med brøk 214
3.8 Bruk av brøkreglene selv om tallene ikke er rasjonale 219
3.9 Utvidelser av tallområdet 223

Kapittel 4 **Desimaltall og prosent 229**
4.1 Desimaltall 229
4.2 Prosent og prosentregning 238
4.3 Overgang mellom desimaltall og brøk 248
4.4 Personlig økonomi og renter 251
4.5 Diagnostisk undervisning og misoppfatninger 264
4.5.1 Misoppfatninger 265
4.5.2 Diagnostiske oppgaver 266
4.5.3 Oppfølging av diagnostiske oppgaver 268

Kapittel 5 **Hoderegning** **275**
5.1 Addisjon 277
5.2 Subtraksjon 279
5.3 Multiplikasjon 281
5.3.1 Telle tiere for seg 282
5.3.2 Dobling og halvering 282
5.3.3 Konjugatsetningen 282
5.3.4 Bruke prosent 283
5.3.5 Bruke distributiv lov 283
5.4 Divisjon 285
5.4.1 Deling på 10 285
5.4.2 Deling på 2, 4 og 8 285
5.4.3 Deling på 3, 6 og 9 286
5.4.4 Deling på 5 287
5.4.5 Deling på 7 287
5.4.6 Deling på desimaltall 288
5.5 Å finne kvadratrøtter 290
5.6 Overslagsregning 293

Kapittel 6 **Delelighet og faktorisering** **297**
6.1 Oddetall og partall 297
6.2 Delelighet 310
6.3 Minste felles multiplum og største felles faktor 317
6.3.1 Euklids algoritme for å finne største felles faktor 328
6.4 Faktorisering 336
6.4.1 Primtall 338
6.4.2 Eratostenes' såld 347
6.4.3 Primtall som byggesteiner 352
6.4.4 Bruk av aritmetikkens fundamentalteorem til å skrive og multiplisere tall 354
6.4.5 Bevis av aritmetikkens fundamentalteorem 355
6.5 Bevis av ulike tallteoretiske setninger 360
6.6 Bevisets plass i matematikk 377

Kapittel 7 **Kongruens** **383**
7.1 Definisjon av kongruens 384
7.2 Eksempler på kongruens 387
7.3 Regning med rester 390
7.3.1 Additive og multiplikative inverser 395
7.4 Formelle bevis for regneregler i kongruensregning 397
7.5 Delelighetsregler 404
7.6 Feiloppdaging ved hjelp av kongruensregning 412

7.7 Lineære kongruenslikninger 416
7.7.1 Løsning med klokkemetoden 416
7.7.2 Løsning med multiplikasjonstabell 421
7.7.3 Nulldivisorer 422
7.7.4 Løsning med diofantiske likninger 426
7.8 Heltallsløsninger av lineære likninger 427
7.8.1 Løsning av diofantiske likninger 427
7.8.2 Pytagoreiske tripler 438

Kapittel 8 **Kryptografi 441**
8.1 Bokstavkoder 442
8.1.1 Bokstavkoder med forskyvning 443
8.1.2 Bokstavkoder med kodeord 446
8.2 Feiloppdagingskoder 450
8.2.1 Kommersielle strekkoder (UPC og EAN) 450
8.2.2 ISBN-nummer 452
8.2.3 Norske fødselsnummer 453
8.3 Koder med offentlig nøkkel 457
8.3.1 RSA-koden 457
8.3.2 Diffie-Hellmann nøkkelutveksling 468

Kapittel 9 **Fibonacci-tallene 475**
9.1 Historisk eksempel: Kaninoppdrett 475
9.2 Det gylne snitt 478
9.3 I naturen 483
9.3.1 Binets formel 485
9.3.2 Eksponensiell vekst av kaniner 487

Litteratur 489

Symbolforklaring 495

Forfatteromtaler 497

Bildeliste 499

Stikkord 501

Innledning

I grunnskolelærerutdanningen rettet mot undervisning på 5.–10. trinn kan du velge hvilke skolefag du ønsker å utdanne deg i. Når du nå holder denne boka i hånda, har du valgt å ha matematikk som ett av fagene, noe vi er glade for. Matematikk brukes overalt i samfunnet og er nødvendig for å forstå verden rundt oss, for å delta i demokratiet, for å opprettholde et moderne teknologisk samfunn, i ingeniørfag, økonomi, forskning, offentlig forvaltning og for å forstå informasjon i media. Matematikk er også et kunstfag hvor man møter overraskende sammenhenger, elegante løsninger og nydelige mønstre. Det er en viktig del av allmenndannelsen å ha kunnskap i matematikk. Dette er grunnene til at matematikk er et av de mest sentrale skolefagene. Som lærer skal du være en brobygger mellom elevens verden, matematikkfaget og samfunnets behov for matematisk kompetanse. Elevene trenger å se at skolefaget henger sammen med den virkeligheten elevene opplever, og at matematikk er nyttig både i arbeidslivet og for å fungere godt i samfunnet.

Gode og dyktige matematikklærere er til inspirasjon for elevene. Det er viktig at du som matematikklærer er glad i faget og har en god faglig ballast. Mange, både voksne og barn, gir uttrykk for at matematikk er et fag som vekker mange følelser. Ber du dem fortelle hva de tenker på når de hører ordet matematikk, er det påfallende mange negativt ladede ord som blir nevnt. Ord som vanskelig, komplisert, kjedelig, frustrerende, avanserte tegn, abstrakt og pugging er noen ord som går igjen. Det er ikke slike ord vi ønsker at elevene våre skal assosiere matematikk med. Vi ønsker at du og elevene dine skal tenke på ord som spennende, kreativt, givende, interessant, lek og fantasi, mønster, forståelse, vakre geometriske former, lærerikt og viktig.

For å forstå dagens matematikkfag i skolen er det nyttig å vite litt om den historiske utviklingen. Navnet på faget har ikke alltid vært som nå.

I Normalplanen av 1939 (N39), het det rekning. Faget hadde to mål: Ett innenfor tall og ett innenfor geometri (former og størrelser). De andre skolefagene var kristendomskunnskap, norsk, heimstadlære, geografi, naturfag, skriving, tegning, sang, handarbeid, kroppsøving og engelsk. I læreplanen for forsøk med 9-årig skole fra 1960 ble rekning erstattet med matematikk, men først for 7.–9. klasse. Etter denne planen skal elevene i 1.–4. klasse ha rekning, mens fra 5. klasse er faget delt inn i to hovedemner: «Rekning og algebra» og «Geometri og romlære». I de senere år har det blitt utviklet teorier om kompetanseområder i skolefaget matematikk som har fått vesentlig innflytelse på læreplaner og matematikkfaget i skolen. Disse kompetanseområdene gjenspeiler en vid oppfatning av hva matematikk er.

Den viktigste delen av matematikken er å se sammenhenger og vise hvorfor disse sammenhengene er slik de er. Videre brukes matematikk til å modellere verden, såkalt anvendt matematikk. Dette har i de senere årene kommet mer inn i skolen. Mens matematikk som skolefag tidligere ble sett på som et fag med spesifikke metoder man skulle lære, er nå bevis og argumentasjon, modellering og anvendelser kommet mye sterkere inn. Noe nytt som har kommet inn med den siste læreplanen i grunnskolen, er algoritmisk tenkning og programmering. Vi har derfor tatt med en del små dataprogrammer der vi tenker det kan være relevant.

Denne boka i QED-serien handler om tall og tallteori. Det mest grunnleggende er hvordan tallsystemet vårt er bygd opp, og de fire regneartene. Vi arbeider med hvordan elevene lærer om tallene, hvordan man kan lære om de ulike regneartene, og hva du som lærer kan gjøre for å prøve å gi elevene en god tallforståelse og strategirikdom for å kunne løse ulike matematiske problemer. Det ses også nærmere på rasjonale tall: brøk, desimaltall og prosent. Underveis i boka prøver vi å vise fram ulike måter du kan undervise fagstoffet på, og knytte matematikken opp mot din rolle som lærer i skolen.

Boka fortsetter så med en innføring i tallteori, som er den delen av matematikken der vi undersøker relasjoner mellom hele tall og klassifiserer dem på ulike måter. I sin snevreste form er tallteori læren om de naturlige tallene, nemlig de hele positive tallene 1, 2, 3, 4. . ., men den utvides ofte til å omhandle alle de hele tallene, hvilket betyr at vi også inkluderer 0 og de negative hele tallene. Her er begreper som oddetall, partall, primtall, delelighet og faktorisering svært sentrale. Oppdelingen i oddetall og partall kan generaliseres, og vi får det vi kaller for kongruensregning, der vi i stedet for å dele opp i to klasser (oddetall og partall), kan dele opp i flere klasser. Dette er bakgrunnen for moderne kodeteori, så det er mange overraskende hemmeligheter tallene kan skjule.

I tallteori har vi muligheten til å bygge opp et emne fra grunnleggende forutsetninger og bevise hvert steg. Dermed får vi vist hvordan en kan bygge opp et emne ved hjelp av logisk gyldige slutninger. I tallteori har vi noen svært enkle grunnregler som de fleste elevene kan forstå, og disse kan da brukes til å oppdage mer avansert matematikk. Mange elever har en meget god intuisjon om hva som kan gjøres i tallteori, med andre ord finner de sanne resultater uten nødvendigvis å kunne forklare på en skikkelig måte hvorfor de er riktige. Men ofte går det galt, og for å få et trygt grunnlag for den matematiske kunnskapen holder det ikke med intuisjon. For å veilede elever er det viktig med et meget godt grunnlag i bevisføring innenfor tallteori.

Vi prøver å være grundige i alle definisjoner, slik at boka i tillegg til å være en lærebok, kan fungere som et oppslagsverk for spørsmål du kanskje har om grunnleggende matematikk. Vi prøver å drøfte de fleste begreper, men hvis du ikke forstår drøftingen, kan du prøve å gå rett til den matematiske formuleringen. Når du har sett den matematiske formuleringen, og et par eksempler, kan du gå tilbake til drøftingen og se om den nå gir mer mening. Ofte vil du oppdage at det egentlig er drøftingen som forklarer begrepet, og ikke minst motivasjonen for å innføre det. Men presiseringene skjer gjennom definisjoner. Hvis vi ser på alle definisjonene i et kapittel først, har vi det grunnleggende ordforrådet i det matematiske språket. Det er først etter at vi har dette grunnlaget at det gir mening å se på teoremene og eksemplene.

Med en god faglig forankring er det lettere å improvisere, følge opp elevenes resonnementer og kunne tilrettelegge for alle elevene i klassen. Som lærer må du ha faglig innsikt for å kunne gi elever passende utfordringer slik at de opplever mestring, samtidig som de strekker seg mot ny kunnskap. Dette er en bok om matematikk og matematikklæring skrevet for å hjelpe deg til å bli en god lærer i faget. Du vil naturlig nok finne mye matematikk i boka, men vinklingen er hele tiden preget av det yrket du utdanner deg til. Mye fagstoff vil du gjenkjenne, men kanskje er det uvant at så mye oppmerksomhet rettes mot forståelse av faget.

Oppbygging av QED 5–10

For å få en fullstendig oversikt over og forståelse for matematikkfaget må du kunne flere emner innen matematikk, f.eks. geometri og måling, algebra og funksjoner og statistikk og sannsynlighet. Disse matematiske emnene vil vi ta opp i egne bøker, og til sammen vil de utgjøre hele QED 5–10. For å oppnå læringsutbyttene nedfelt i nasjonale retningslinjer for grunnskolelærerutdanning trinn 5–10 vil man måtte støtte seg på alle de fire bøkene i QED trinn 5–10. Noe av fagstoffet i bøkene vil gi deg kunnskap, ferdigheter og generell kompetanse som er målene for mate-

matikk 1, mens fordypning av lærestoff vil gi deg kunnskap, ferdigheter og generell kompetanse som er mål for matematikk 2. Uansett hvilke av bøkene (tall og tallteori, geometri og måling, algebra og funksjoner og statistikk og sannsynlighet) du jobber med, skal du kunne gjenkjenne vårt ønske for bøkene: et fokus på hvordan elevene lærer matematikk, hvordan man kan lære om de ulike tilnærminger og løsningsmetoder, og hva du som lærer kan gjøre for å prøve å gi elevene en god matematikkforståelse og strategirikdom for å kunne løse ulike matematiske problemer. I de ulike bøkene vil vi prøve å vise frem ulike måter du kan undervise fagstoffet på, og knytte matematikken opp mot din rolle som lærer i skolen.

Sammenheng og helhet

Denne boka skal ikke leses som en roman fra første til siste side. Ved første gangs lesning er det naturlig å hoppe over de fleste kryssreferansene og kanskje noen av bevisene, men etter hvert som du kommer lenger ut i studiet, kan du styrke forståelsen din ved å slå opp stadig flere av dem. Enkelte tema går igjen mange steder, blant annet bruk av programmering og digitale verktøy. Underveis i boka tas digitale verktøy opp der det naturlig inngår i det matematiske fagstoffet og læringen av det. Bakerst i boka finnes det symbolforklaringer (side 495) og stikkordregister (side 501).

Forklaringer

Det brukes mye plass til forklaringer i form av tekst, bilder og figurer. Selvsagt vises det hvordan utregninger skal foretas, og hvilken betydning ulike symboler har, men langt mer enn dette må forklares. Matematikk består av ei rekke ideer og tenkemåter som ikke kan formidles bare ved å skrive ned matematiske symboler. I tillegg har matematikken ei rekke begreper, som for eksempel primtall og kvadrat. Alle matematiske begreper har en definisjon, men de trenger også en forklaring i tillegg til definisjonen. Historiske eksempler er et av bokas virkemidler for å formidle ideer som du ikke selv uten videre kan se fra en formell framstilling av matematikken. I tillegg til matematikkens ideer forklarer vi hvordan du kan legge til rette for elevers læring av de faglige emnene.

Eksempel

Eksempler kan vise ulike framgangsmåter og måter å tenke på. Ofte er eksempler utgangspunktet for bokas forklaring av ideer. Dette blir gjerne markert med «Diskusjon». I læreplanen LK20 er programmering tatt med i matematikkfaget. Der hvor vi tenker at et dataprogram kan øke forståelsen for matematikken som omtales, har vi tatt med programmeringskode. Du bør alltid prøve å forstå både det programmeringstekniske og det matematiske innholdet i disse kodene.

Definisjon

Definisjoner klargjør den formelle betydningen av matematiske eller pedagogiske begreper og matematiske symboler. Vi vil ofte drøfte definisjonen og trekker da i tillegg fram intuisjon og ideer som er nødvendige for å bruke og forstå definisjonen.

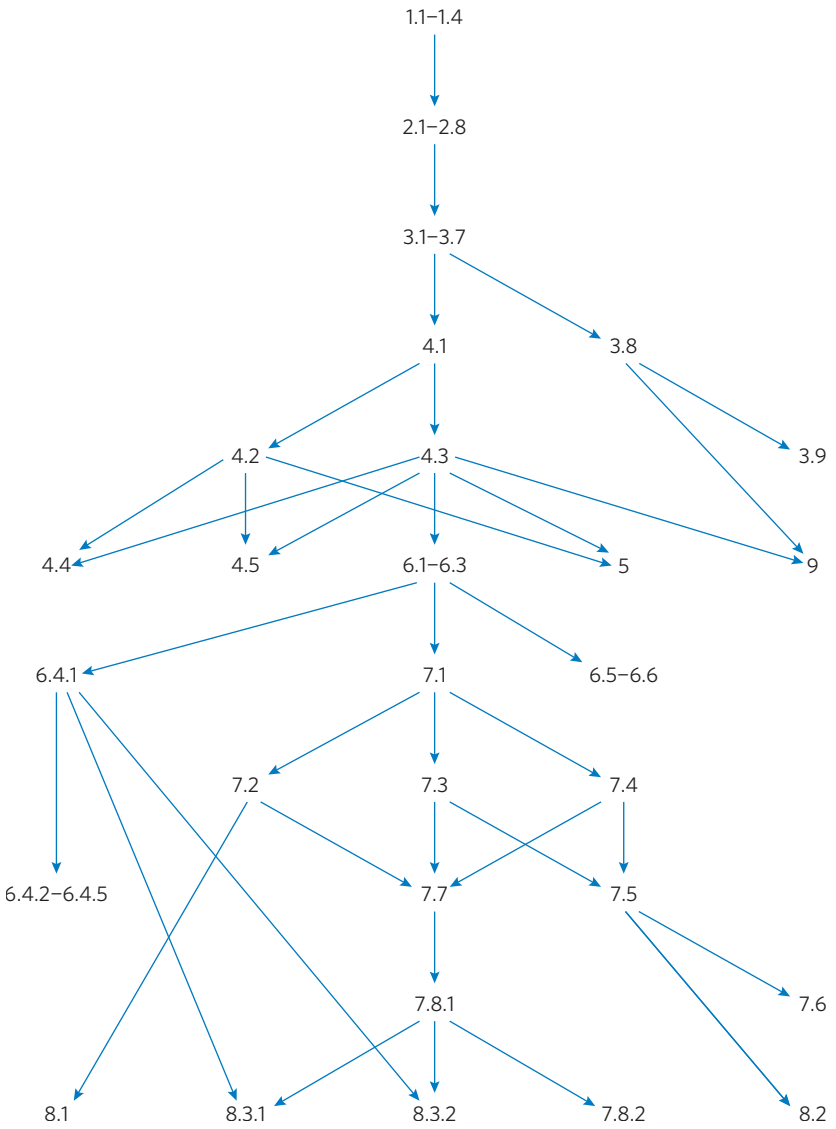
Setninger og aksiomer

En setning er en generell sann matematisk påstand. En setning som er spesielt viktig, kalles et teorem, mens en hjelpesetning kalles et lemma. Aksiomer er ubevisbare grunnprinsipper som setninger kan utledes fra. Etterfølgerprinsippet er et eksempel på et aksiom. Definisjoner, teoremer, setninger og aksiomer er skilt ut med rammer.

Oppgaver

Oppgaver kommer på slutten av delkapitler. Det betyr ikke nødvendigvis at du skal lese all teksten i et delkapittel før du arbeider med oppgaver. Noen få steder ber vi deg i selve teksten å tenke over noe **før du fortsetter**, men du bør ha en reflekterende tilnærming hele tiden. Læring av matematikk skjer gjennom en veksling mellom ulike arbeidsformer, der lesning av bokas tekst og arbeid med oppgaver er to av dem. En del oppgaver øver på teknikker og løsningsmetoder, men det er mange oppgaver der du alene eller sammen med andre studenter blir bedt om å reflektere over, å forklare eller å lage egne eksempler, oppgaver eller undervisningsopplegg. Du som student er et skapende individ i møtet med samfunn og kultur. Du skal både lære deg teknikker og metoder som inngår i den matematiske og pedagogiske kulturen, og selv aktivt gjøre kunnskapen til din egen og anvende den på nye situasjoner. Oppgaver er en god måte å lære seg nytt stoff på.

Progresjon gjennom boka



Skjemaet viser hvilke kapitler som faglig sett bygger på hverandre slik at underviser eller leseren kan velge hva som skal vektlegges. For å forstå et kapittel bør man ha arbeidet med kapitlene som pilene kommer fra.

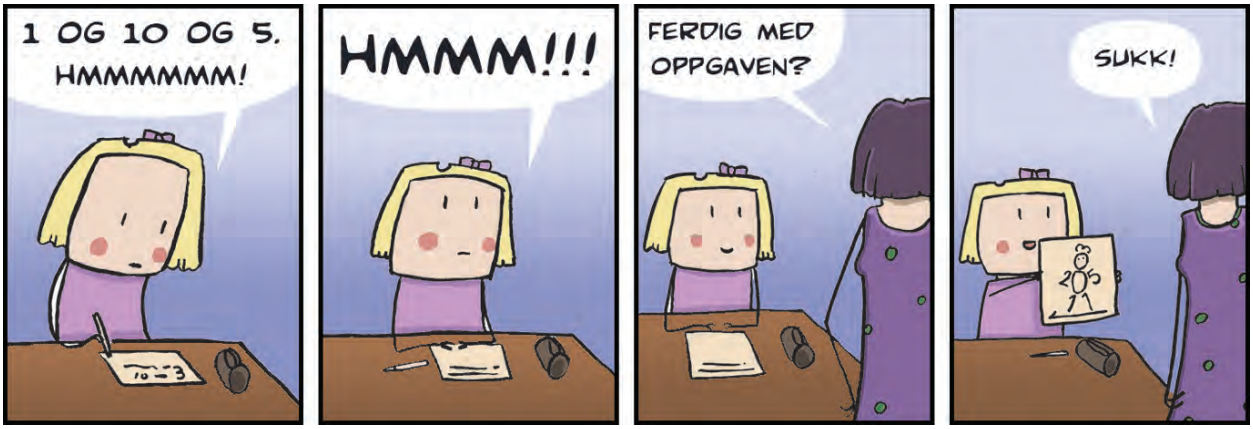
Fasiten til oppgavene i denne boka finner du på Cappelen Damms nettsider. Søk opp boka på cda.no. Under fanen «Tilleggsmateriell» finner du den som en nedlastbar pdf-fil.

Tall

Fra boka *Den lille prinsen* har vi hentet dette avsnittet om tall:

De voksne elsker tall. Hvis du forteller dem om en ny venn, spør de aldri om vesentlige ting. De spør aldri: «Hvordan var stemmen hans? Hva er det han helst leker med? Samler han på sommerfugler?» Nei, de spør: «Hvor gammel er han? Hvor mange søsken har han? Hvor meget veier han? Hvor meget tjener hans far?» Og først da tror de at de kjenner han. Dersom du sier til en voksen: «Jeg har sett et nydelig rødt steinhus med geranier i vinduet og duer på taket», så kan de slett ikke tenke seg hvordan det ser ut. Du skal si: «Jeg har sett et hus til hundre tusen franc.» Og da vil de rope: «Å, så nydelig det er!»

Saint-Exupéry (1998)



Før du fortsetter: Bruk noen minutter til å skrive ned litt av det du vet om tall, og lag et tankekart over begreper knyttet til tall.

1.1 Hva er tall?

Selv om tall er noe du møter i hverdagen og har kjent til i store deler av livet, er det likevel ikke helt enkelt å forklare hva tall er. Du møter tall i skolens matematikktimer, og også i andre fag og utenom skolen. Mange elever har dessverre vansker med å se sammenhengen mellom matematikktimenes tall og hverdagstallene. Dette er synd, for da mister de både gleden ved å anvende matematikk og rike kilder til forståelse av faget. Vi skal se hvordan elevene kan møte tallene i skjæringspunktet mellom sin egen virkelighet, skolens matematikkfag og kulturen rundt oss.

Tall har ulike funksjoner alt etter hvilken sammenheng eller kontekst de opptrer i. Telling er kanskje det første du forbinder med tall. Svært mange ting kan telles, for eksempel bøkene i et bibliotek. Det som telles, er knyttet til spørsmålet «hvor mange?». Temperatur oppgis også ved hjelp av tall, men temperaturer måles. De telles ikke. Spørsmålet som svarer til måling, er «hvor mye?». Postnummer uttrykkes også ved tall. Det er et system innført av Posten for at brev effektivt skal komme dit de skal. For eksempel har steder nær hverandre ganske like postnummer. Vi finner imidlertid ikke frem til et steds postnummer verken ved å telle eller ved å måle. Alle norske statsborgere har også sitt eget tall med elleve sifre, nemlig personnummeret. Dette nummeret begynner med personens fødselsdato, slike tall kalles tall for identifikasjon. I sitatet fra *Den lille prinsen* bruker forfatteren tall som antall, for eksempel «hvor mange søsken?». Spørsmålet «hvor meget veier han?» dreier seg derimot om målte tall. Det som måles, kalles ofte *mengde*. Bruker vi samme slags tallforståelse når vi teller, måler og regner?

Figur 1



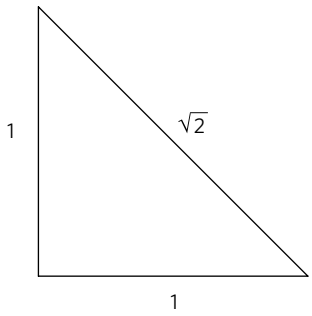
Et interessant filosofisk spørsmål er om tall er oppdaget eller oppfunnet. Det er ikke sikkert du har tenkt gjennom dette, men spørsmålet kan være et flott utgangspunkt for å samtale med elever om hva tall er. Det er en vanskelig problemstilling som neppe har et entydig svar. Hva betyr det så at et tall er oppdaget eller oppfunnet? Kan vi si at forholdstallet mellom omkrets og diameter, π, er oppdaget eller oppfunnet? Er tallet 3 oppdaget eller oppfunnet? Samlinger av tre objekter finnes uten tvil i verden rundt oss, for eksempel slik det er vist til venstre i margen.



Kanskje har vi oppfunnet tallsymbolet 15 og det abstrakte begrepet «femten», men oppdaget konkrete samlinger av femten objekter? I matematikken kaller vi samlinger av objekter med samme type for *mengder*, se definisjon 1. Når ordet brukes i entall, mengde, kan det sammenblandes med størrelser som måles. Som nevnt ovenfor kalles det også for mengde. Mengden av vann i Mjøsa betyr hvor mye vann det er i denne innsjøen. Vannmolekyler kan kanskje i prinsippet telles, men «hvor mye?» er det naturlige spørsmålet å stille også i det tilfellet.

Tallene har også ideologisk eller filosofisk betydning innenfor noen kulturer. Mest kjent er kanskje filosofien til de greske tallmystikerne, kjent som pytagoreerne. For dem var alt knyttet til det som kan telles. Tall for dem var det som kan telles, eller som er et forhold mellom tall. De godkjente altså positive hele tall og brøker hvor teller og nevner er positive hele tall. En av deres egne oppdaget imidlertid at det finnes såkalte *irrasjonale tall*, tall som ikke var blant «de godkjente».

Figur 2



Kvadratrota av 2, skrevet $\sqrt{2}$, er lengden av den lengste siden i en rettvinklet og likebeint trekant hvor lengdene til de to like lange sidene er én lengdeenhet. Vi skal se i kapittel 6.5, setning 23 på side 370, at $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall, dvs. et tall som ikke kan skrives som en brøk eller et forhold mellom hele tall. En legende sier at oppdagelsen av irrasjonale tall fikk katastrofale følger for oppdageren, som visstnok fikk en møllestein rundt halsen og ble kastet i Middelhavet.

I gresk filosofi er det ikke bare pytagoreerne som er kjent for å ha vært opptatt av tall. Platon mente at tallene er universets harmoni, og Aristoteles hevdet at alle tings opprinnelse og substans er i tallene. Det samme finner vi igjen i hinduismen. Kirkefader Augustin er også kjent for å være en av historiens store filosofer. Han knyttet universets oppbygging til sitt platoniske syn, der tall er til før skapelsen.

Definisjon 1

Mengde (samling av objekter)
En mengde er en samling av objekter. Objektene kalles elementer.

Mengden beskrives enten ved å liste opp alle elementene, eller ved å fortelle hvilke krav som må oppfylles for å være et element i mengden. Hvis mengden har et endelig antall elementer, er kardinaliteten til mengden antallet elementer. I denne boka vil vi se på mengder der objektene (elementene) er av samme type[1]. Mengdeteori er vanskelig, for vi kommer lett opp i paradokser[2], men i denne boka skal vi holde det enkelt.

[1] Bertrand Russell (1872–1970) innførte typeteorien som innebærer at alle elementer i en mengde har samme type. Ideen er i dag mest kjent i forbindelse med datatyper knyttet til programmering. Den matematikkdidaktiske begrunnelsen for å holde seg til én type objekter i mengder er å gjøre telling meningsfull, og at mengder skal være lett å oppfatte for barn. Hensikten bak å telle noe gir opphav til en datatype, og hensikten krever et begrep. Et eksempel er begrepet «kjøkkenredskap» som kan motivere telling av mengder som består av kniver, gafler, skjeer osv.

[2] Et eksempel på et paradoks er: Anta at elementene til en mengde er definert som alle mengder som ikke har seg selv som element. Dette kalles Russells paradoks.

Eksempel 1

Eksempler på ulike mengder

Noen eksempler på ulike mengder er:

- alle røde biler på parkeringsplassen utenfor skolen
- alle naturlige tall
- alle partall
- elevene i klassen
- klassene på skolen din ■

I det sistnevnte tilfellet kan man legge merke til at elementene i mengden selv er mengder, en klasse er en mengde av elever.

Flere forutsetninger må være oppfylt for at noe kan telles. En av disse er at det som telles, må kunne sees som eksempler på samme type ting.

Figur 3



Kronestykker er uten tvil samme type ting. Figuren viser fire slike. Nedenfor ser du fire mynter:

Figur 4



Objektene i figur 4 er av samme type, for de er alle mynter. Likevel er det langt mindre naturlig å telle disse myntene enn de fire kronestykkene. Kanskje bare myntsamlere ville telle fire forskjellige mynttyper.

Definisjon 2

Naturlige tall

Naturlige tall, $\mathbb{N}$, er det samme som de positive hele tall, altså de tallene vi kan bruke til å telle elementene i mengder. $\mathbb{N}_0$ er de hele positive tall og 0.

Vi vil videre i dette kapittelet, med ett unntak, holde oss til de naturlige tallene. Tallet null er spesielt og ble ikke akseptert før lenge etter de positive hele tallene. Vi kan nemlig ikke telle ingenting. Null er likevel nyttig som størrelsen på en tom mengde. I stedet for å si «ingen mynter», kan vi si 0 mynter. Lenge før tallet 0 ble godtatt, ble 0 tatt i bruk som en *plassholder*, det vil si som siffer, se kapittel 1.2.4. I tallet 20 er 0 en plassholder som betyr at det er ingen enere. Først når vi godtar 0 som et svar på regnestykker av typen $17 - 17 = 0$, kan vi kalle 0 et tall. Også i barns læring av

tall er det 0 som plassholder som bør komme først, selv om det ikke er uvanlig at 0 tidlig innføres som et synonym for «ingen».

Brøker og desimaltall er nødvendige for å utføre målinger. De brukes for å svare på spørsmålet «hvor mye?». Da dukker «mengde» i den andre betydningen opp.

Definisjon 3

Målbare størrelser (mengde)
Størrelser som kan måles, kalles målbare. De måles med brøker eller desimaltall. Hvor mye vi har av tid eller en tredimensjonal størrelse, kalles mengden av det vi snakker om.

Eksempler på målbare størrelser er lengde, areal, vekt, tid og volum. Vi sier «hvor mye bær?», «hvor lang tid?» og «hvor mye vann?». Svar på disse spørsmålene kan være «en mengde bær», «mengder av tid» eller «en mengde vann». Derimot sier vi «hvor lang?» eller «hvor stor flate?» knyttet til det en- og todimensjonale. Når vi ser på tauet som noe fysisk og romlig, kan vi si «hvor mye tau?» og «en mengde tau». Tall som målte størrelser er betydningsfulle for vår virkelighetsoppfatning. Måling av tid påvirker oss langt mer enn vi tenker over. Samfunnet hadde vært et helt annet uten tidsmåling. Andre eksempler er farten til bilen du kjører, eller arealet av huset du bor i. Det siste kan ha betydning for hvor høye kommunale avgifter du betaler. Måltall muliggjør også sammenlikninger. Utsagn som «jeg er større enn deg» eller «jeg er raskere enn deg», kan gjøres presise. Hurtighet kan for eksempel defineres som tiden en person bruker på å løpe en sekstimeter.

Det du først og fremst forbinder med tall, er kanskje telling og *antall*. En annen bruksmåte er måling. Vi måler i liter, meter, timer osv. Tall brukt til måling kalles *måltall*. Måling og måltall tas opp i *QED 5–10: Geometri og måling*. Husnummer er verken knyttet til antall eller måling. Derimot er rekkefølgen viktig. Hus nummer 84 kommer etter hus 82. Vi kaller denne bruken for *ordenstall*. En fjerde bruksform er *tall som identifikasjon*. Telefonnummer, kontonummer, pinkoder, personnummer og nummer på bussruter er eksempler på dette. Disse tallene har verken framkommet ved telling, måling eller ved å ordne i rekkefølge.

I forsvaret er du «843-7 Jansen», åttende kompani, fjerde tropp, lag tre, køye sju. Dette er med på å skape avstand og å avpersonifisere personer. Under krigen hadde krigsfanger et nummer, ingen navn, noe som gjorde det «lettere» å avrette personer. Nr. 56 798 er lettere å skyte enn Kristoffer Jansen. Det er vanskeligere å slakte Litago enn NRF-37. Bruk av tall framfor navn kan derfor ha etiske konsekvenser.



Figur 5

Vi er alle identifisert med et personnummer. Professor Ernst S. Selmer (1920–2006) utviklet personnummersystemet vi har i dag, og som har vært i bruk siden 1964. Han laget det som en kode der de fleste feiltastinger kan avsløres ved to enkle kontrollnummer *a* og *b*. Hvordan dette regnes ut, kommer vi tilbake til i kapittel 8.2.3. For de interesserte: Innen 2032 skal hvordan vi regner ut kontrollsifrene i personnummeret endres. Sjekk gjerne ut «ny personindikator» med et søk på internett.

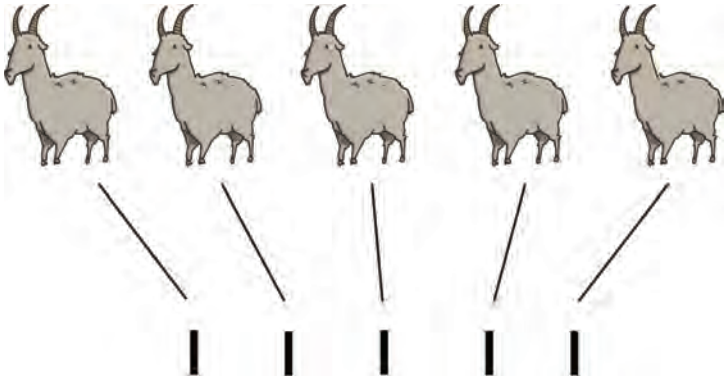
1.2 Et historisk blikk på tallsystemets utvikling

Hva er motivasjonen og behovet bak utviklingen av tallene? Forståelse av hvordan vårt tallsystem har utviklet seg, kan gi deg forståelse av den utviklingen som foregår hos eleven. Arbeid med utviklingen av tall og tallsystemer kan gi deg erfaring med hvor genialt dagens tallsystem er. I dagens multikulturelle klasserom er det stor sjanse for at du møter elever med ganske andre erfaringer enn dine egne, selv om det hindu-arabiske tallsystemet brukes i de aller fleste deler av verden. Kunnskap om hvordan tallene har utviklet seg i ulike kulturer, er nyttig også for å møte elever med bakgrunn fra andre land. Erfaring med andre tenkemåter og uttrykksformer styrker muligheten til å kunne møte alle elever på en god måte.

Folk har tidlig hatt behov for å få oversikt over eiendelene sine. I 1937 fant man i Tsjekkia et ulvebein med 55 hakk, gruppert i femmergrupper. Funnet er anslått til å være 30 000 år gammelt.

Koblingen mellom eiendeler og hakk i et bein er et eksempel på et fenomen vi i matematikken kaller *en-til-en-kobling*.

Figur 6



Her er det laget en strek eller et hakk for hver geit. Hver strek er *koblet* med en geit, og hver geit er koblet med en strek. Derfor kalles det en-til-en-kobling.

Figur 7



På beinet som ble funnet i Tsjekkia, var det et dobbelthakk ved markering nummer 25. Kombinert med grupperingen i femmere har dette noe til felles med det vi i dag kaller et femtallsystem. Et slikt tallsystem er som vårt titallsystem, bortsett fra at *grunntallet* eller *basen* er fem i stedet for ti. I et femtallsystem er utgangspunktet grupperinger på fem.

Her markerer sirkelen ei gruppe på fem trekanter. I neste omgang kan vi danne ei gruppe av fem slike sirkler:

Figur 8



I vårt tallsystem skriver vi dette som 25. Grunnen er at vi tenker trekantene gruppert i 2 tiere og 5 enere. Det er imidlertid mulig å holde seg utelukkende til gruppering i femmere, se kapittel 1.2.6. Ei hånd består av fem fingre. Historisk har trolig kroppen vår hatt avgjørende betydning for hvordan vi grupperer.

Eksempel 2

Hender som utgangspunkt for gruppering i 10



Kroppslig opphav til gruppering

Hender og føtter gir opphav til grupperinger i femmere (ei hånd), tiere (begge hendene) og tjuere (hendene og føttene). ■

Alle disse grupperingene har vært brukt historisk. Gruppering i 20 ble brukt av mayaene. Også andre grunntall har vært brukt, og spesielt kjent er babylonernes bruk av 60, se kapittel 1.2.4. I dag har vi rester etter dette systemet med grupper på 60. En time er delt inn i 60 minutter, og et minutt er delt inn i 60 sekunder. Noe liknende brukes i vinkelmåling.