

QED 1-7

Trond Stølen Gustavsen, Reinert A. Rinvold,
Kristin Ran Choi Hinna og Trude Sundtjønn (red.)

QED 1-7

Matematikk for grunnskolelærerutdanningen

Bind 1

2. utgave

CAPPELEN DAMM AKADEMISK

© CAPPELEN DAMM AS, Oslo, 2025

ISBN 978-82-02-75821-9

1. utgave, 1. versjon 2025

E-utgaven baserer seg på 2. trykte utgave, 1. opplag, Cappelen Damm Akademisk, 2022.
1. utgave av boka ble utgitt av @ Høyskoleforlaget, Kristiansand, 2012

Materialet i denne publikasjonen er omfattet av åndsverklovens bestemmelser. Uten særskilt avtale med Cappelen Damm er enhver eksemplarframstilling og tilgjengeliggjøring bare tillatt i den utstrekning det er hjemlet i lov eller tillatt gjennom avtale med Kopinor, interesseorgan for rettighetshavere til åndsverk. Enhver bruk av hele eller deler av utgivelsen som input eller som treningskorpus i generative modeller som kan skape tekst, bilder, film, lyd eller annet innhold og uttrykk, er ikke tillatt uten særskilt avtale med rettighetshaverne.

Bruk av utgivelsens materiale i strid med lov eller avtale kan føre til inndragning, erstatningsansvar og straff i form av bøter eller fengsel.

Illustrasjoner og foto: Se bildeliste, s. 813
Sats: Gamma grafisk AS (Vegard Brekke)
Elektronisk tilrettelegging: Merkur grafisk AS
Omslagsdesign: AiT Bjerch AS
Omslagsillustrasjon: Alf Christian Hvaring

Boka er utgitt med støtte fra Kunnskapsdepartementet ved
Lærebokordningen for høyere utdanning.

www.cda.no
akademisk@cappelendamm.no

Forord

Vi er glade for å presentere QED 1–7 i ny revidert utgave. Det er blitt ei bok som er enda mer spisset inn mot begynneropplæring og undervisning på barnetrinnet. Boka er skrevet for læreplanverket Kunnskapsløftet 2020 (LK20). Bind 1 er tilpasset de obligatoriske 30 studiepoeng matematikk i grunnskolelærerutdanningen.

I arbeidet med revisjonen er redaksjonsgruppa supplert, og flere nye forfattere har bidratt. Til sammen har redaksjonsgruppa og kapittelforfatterne en omfattende og sammensatt kompetanse. Det gjør at boka tar opp mange sider ved matematikk i skolen og lærerutdanningen. Boka presenterer oppdatert kunnskap om matematikk som undervisningsfag tilpasset behovene i dagens skole og samfunn. En viktig del av visjonen for QED-bøkene er å lage et mest mulig komplett læreverk for matematikklærere på 1.–7. trinn. Innholdet er valgt ut med utgangspunkt i de nasjonale retningslinjene for grunnskolelærerutdanningen og erfaring fra hva som er relevant og viktig i matematikken på barnetrinnet. Blant de mange som har bidratt til utgivelsen av denne boka, vil redaksjonsgruppa særlig takke kapittelforfatterne. Uten deres spisskompetanse og formuleringsevne hadde det ikke vært mulig å lage denne boka.

Redaksjonsgruppa vil rette en stor takk til redaksjonssjef Bjørn Olav Aas Hansen som har vært med oss fra første utgave av verket for over 10 år siden. Uten Bjørn Olavs energi og drivkraft hadde ikke bøkene blitt realisert. I denne revisjonen er vi blitt ledet med stødig hånd av manusredaktør Bente Aas Sjørson som har holdt i alle trådene, uten deg hadde vi ikke kommet i mål. Vi vil også takke språkkonsulent Siv Rekve for hennes grundige gjennomgang og Vegard Brekke for fremragende arbeid med den grafiske utformingen av boka.

Redaksjonsgruppa ønsker i tillegg å takke fagkonsulentene, kollegaer, leserne av den opprinnelige boka og studenter som har gitt viktige bidrag for at revisjonen skulle bli så bra som mulig.

Redaksjonsgruppa, Drammen/Hamar/Bergen/Oslo

Trond Stølen Gustavsen, Reinert A. Rinvold,
Kristin Ran Choi Hinna og Trude Sundtjønn (red.)

Innhold

	Velkommen til studiet.....	15
Kapittel 1	Tall	19
	<i>Reinert A. Rinvold, Kristin Ran Choi Hinna, Trond Stølen Gustavsen og Trude Sundtjønn</i>	
1.1	Hva er tall?	20
1.2	Ulike aspekter ved tall	23
1.3	Et historisk blikk på tallsystemets utvikling.....	24
1.3.1	Additive tallsystemer.....	26
1.3.2	Siffersystemer.....	27
1.3.3	Multiplikative systemer	28
1.3.4	Posisjonssystemer.....	30
1.3.5	Titallsystemet og representasjoner.....	32
1.3.6	Posisjonssystemer med andre grunntall.....	36
1.4	Det grunnleggende tallbegrepet.....	43
1.4.1	Kardinaltall	44
1.4.2	Kvantorer	47
1.4.3	Invarianser for antall	49
1.4.4	De fem telleprinsippene.....	50
1.4.5	Tidlig utvikling av antallsbegrepet.....	53
1.4.6	Abstraksjon og representasjon av antall.....	54
1.4.7	Ordinaltall.....	58
1.4.8	Læring av posisjonssystemet.....	60
1.5	Regneartene.....	65
1.5.1	Addisjon	67
1.5.2	Subtraksjon og negative tall	84
1.5.3	Multiplikasjon	94
1.5.4	Divisjon	112
1.5.5	Hoderegning	122

1.6	Brøk	126
1.6.1	Brøkers ulike betydninger	128
1.6.2	Ulike modeller for brøk	133
1.6.3	Likeverdige brøker	138
1.6.4	Sammenlikning av brøker	141
1.6.5	Addisjon av brøk	145
1.6.6	Multiplikasjon av brøk	149
1.6.7	Divisjon med brøk	154
1.7	Desimaltall og prosent	159
1.7.1	Prosent	163
1.7.2	Overgang mellom desimaltall og brøk	164
1.8	Utvidelser av tallområdet	169
	Referanser	174

Kapittel 2

Algebra		177
<i>Reinert A. Rinvoold, Trond Stølen Gustavsen, Kristin Ran Choi Hinna og Trude Sundtjønn</i>		
2.1	Hva er algebra?	177
2.2	Hva er algebraisk tenkning?.....	178
2.3	Prealgebra.....	182
2.3.1	Konvensjoner i matematikken	183
2.3.2	Likhet mellom tall	184
2.4	Tidlig algebra.....	187
2.4.1	Variabler og funksjonssammenhenger.....	187
2.4.2	Tallfølger og regneoperasjoner som funksjoner	193
2.4.3	Situasjonsbaserte visuelle tallmønstre.....	194
2.4.4	Symbolsk generalisering.....	203
2.4.5	Variabler i regneark	206
2.4.6	Generaliserte tall og multiplikasjon av negative tall ..	208
2.4.7	Likninger og funksjoner.....	216
2.5	Lineære funksjoner	226
2.5.1	Likninger og balansetenkning	228
2.5.2	Problemløsning og likninger	232
2.5.3	Lineære likningssystemer.....	235
2.5.4	Lineære ulikheter.....	240
2.6	Potenser og eksponentialfunksjoner	245
2.6.1	Potenser.....	245
2.6.2	Standardform for tall	254
2.7	Grafer	259
2.8	Delelighet og faktorisering	263
2.8.1	Delelighet	263
2.8.2	Faktorisering	270
Referanser		276

Kapittel 3

Geometri og måling	277
<i>Trond Stølen Gustavsen, Kristin Ran Choi Hinna, Reinert A. Rinvol, Trude Sundtjønn og Andrea Hofmann</i>	
3.1 Elevers møte med geometri	278
3.2 Todimensjonale geometriske figurer	279
3.2.1 Punkter og linjer	279
3.2.2 Mangekanter	282
3.2.3 Sirkler	289
3.3 Nivåer i utvikling av geometrisk forståelse	292
3.3.1 van Hiele-nivå 1 – Visualisering	294
3.3.2 van Hiele-nivå 2 – Analyse	295
3.3.3 van Hiele-nivå 3 – Abstraksjon og uformell deduksjon	296
3.3.4 van Hiele-nivå 4 – Deduksjon	297
3.3.5 Overganger i van Hiele-modellen	297
3.4 Den tidlige geometriopplæringen	299
3.5 Tredimensjonale geometriske figurer	307
3.6 Måling og måleenheter	317
3.6.1 Hva er måling?	318
3.6.2 Måleenheter	318
3.6.3 Måling i skolen	320
3.6.4 Måling av lengde	320
3.6.5 Måling av areal	326
3.6.6 Måling av volum	330
3.6.7 Måling av vinkler	333
3.6.8 Måling av tid	335
3.6.9 Måleusikkerhet	337
3.6.10 Avrunding	339
3.7 Beregning av areal og omkrets	343
3.7.1 Areal av mangekanter	343
3.7.2 Omkrets av mangekanter og andre figurer	347
3.7.3 Areal og omkrets av en sirkel	348
3.8 Beregning av volum og overflateareal	353
3.8.1 Overflateareal til polyeder, sylinder og kjegle	353
3.8.2 Volum til polyeder, sylinder og kjegle	356
3.9 Geometriske steder og konstruksjon	362
3.9.1 Geometriske steder	362
3.9.2 Konstruksjon med passer og linjal	364
3.9.3 Konstruksjon ved hjelp av papirbretting	365
3.9.4 Geometriske figurer i koordinatsystem	367
3.9.5 Konstruksjon i GeoGebra	369
3.9.6 Konstruksjon ved hjelp av programmering	370
3.10 Kongruensavbildninger og symmetri	375
3.10.1 De fire typene av kongruensavbildninger	375
3.10.2 Symmetri	383

3.11	Kongruenssetningene.....	393
3.12	Formlikhet.....	399
3.13	Bevis for grunnleggende setninger i geometri.....	409
3.13.1	Utgangspunkt for argumentasjon i geometri i skolematematikken	409
3.13.2	Vinkelsum.....	410
3.13.3	Pytagoras' setning.....	411
	Referanser	418

Kapittel 4

Statistikk og sannsynlighet..... 419

*Reinert A. Rinbold, Trond Stølen Gustavsen, Trude Sundtjønn og
Kristin Ran Choi Hinna*

4.1	Statistikk på småskoletrinnet.....	420
4.2	Datainnsamling.....	424
4.3	Tabeller og diagrammer.....	426
4.4	Sentralmål.....	434
4.4.1	Gjennomsnitt.....	435
4.4.2	Typetall	436
4.4.3	Median.....	437
4.4.4	Oppsummering.....	440
4.5	Spredningsmål	442
4.6	Misbruk av statistikk	447
4.7	Sannsynlighetsbegrepet	450
4.7.1	Teoretisk og empirisk sannsynlighet	451
4.7.2	Subjektiv sannsynlighet.....	454
4.7.3	Tilfeldige forsøk	456
4.7.4	Empirisk sannsynlighet og store talls lov.....	459
4.7.5	Utfall med forskjellig sannsynlighet	462
4.8	Sannsynlighetsmodeller	467
4.8.1	Realistiske og urealistiske sannsynlighetsmodeller ...	475
4.8.2	Simulering av tilfeldige forsøk	478
4.9	Erfaring, språk og læring	479
4.10	Sammensatte forsøk	484
4.10.1	Multiplikasjonssetningen for sammensatte forsøk....	484
4.10.2	Komplement og komplementære hendelser.....	490
4.11	Sannsynlighetsregningens historie.....	493
4.12	Kombinatorikk.....	496
4.12.1	Multiplikasjonsprinsippet	496
4.12.2	Rekkefølger.....	498
4.12.3	Utvalg.....	500
	Referanser	506

Kapittel 5

Matematisk resonnering, argumentasjon og bevis på barnetrinnet ... 507

Ole Enge og Anita Valenta

5.1	Hva er matematisk resonnering, argumentasjon og bevis? ...	509
5.2	Argumentasjon og bevis for ulike typer hypoteser	514
5.2.1	Generelle hypoteser	515
5.2.2	Hypoteser som omhandler endelig mange eksempler	523
5.2.3	Hypoteser som omhandler enkeltteksempler	524
5.3	Hvorfor bevis i skolematematikk?	526
5.4	Elevers utfordringer i arbeid med matematisk resonnering ...	528
5.5	Å undervise i matematisk resonnering	529
5.6	Aktiviteter som fremmer matematisk resonnering	533
	Referanser	544

Kapittel 6

Programmering i matematikkundervisningen 545

Odd Tore Kaufmann, Børre Stenseth og Sanna Forsström

6.1	Programmering	546
6.1.1	Hva er algoritmisk tenkning?	548
6.1.2	Programmering i Kunnskapsløftet 2020 (LK20)	550
6.2	Grunnleggende ferdigheter og strukturer i programmering ...	551
6.2.1	Algoritmebeskrivelse	552
6.2.2	Sentrale begreper	555
6.3	Undervisning i programmering	561
6.3.1	Kopiering	561
6.3.2	Feilretting	561
6.3.3	Iterasjoner	562
6.3.4	Kreativitet	563
6.3.5	Samarbeid	564
6.3.6	Use, modify og create	564
6.3.7	Lærerrollen	566
6.4	Frakoblet programmering	567
6.4.1	Eksempler på aktiviteter med frakoblet programmering	568
6.5	Blokkbasert programmering	578
6.5.1	Kom i gang med Scratch	578
6.5.2	Flere eksempler på aktiviteter med Scratch	583
6.6	Tekstbasert programmering	593
6.6.1	Dat typer	595
6.6.2	Lister	596
6.6.3	Løkker	596
6.6.4	Betingelser	597
6.6.5	Tall og matematikk	597
6.6.6	Skilpaddegrafikk	597

6.7	Alternative programmeringsspråk	606
6.7.1	micro:bit	607
6.7.2	Lego Mindstorms	612
6.7.3	Alternative tekstbaserte språk.....	613
	Referanser	617

Kapittel 7

Helhetlig matematikkundervisning 619

Ole Enge og Anita Valenta

7.1	Matematikkundervisning	619
7.2	Matematisk kompetanse	624
7.2.1	Begrepsmessig forståelse.....	625
7.2.2	Kunnskap om framgangsmåter.....	626
7.2.3	Resonnerende tankegang.....	627
7.2.4	Strategisk tankegang	628
7.2.5	Produktiv tilbøyelighet.....	629
7.2.6	Utvikling av matematisk kompetanse	629
7.3	Undervisningspraksiser for helhetlig matematikkundervisning	630
7.3.1	Sette tydelige faglige mål	631
7.3.2	Bruke oppgaver med høye kognitive krav	632
7.3.3	Bruke ulike representasjoner	635
7.3.4	Legge til rette for meningsfull matematisk samtale ...	637
7.3.5	Stille hensiktsmessige spørsmål	639
7.3.6	Bygge kunnskap om framgangsmåter med utgangspunkt i begrepsmessig forståelse.....	640
7.3.7	Støtte produktivt strev	642
7.3.8	Vurdering for læring som en del av undervisningen...	643
7.3.9	Helhetlig matematikkundervisning – en oppsummering.....	645
7.4	Planlegging av matematikkundervisning	646
	Referanser	656

Kapittel 8

Språk og didaktiske verktøy..... 659

Kristin Ran Choi Hinna og Reinert A. Rinvold

8.1	Semiotikk.....	660
8.2	Læring av tegn og begreper.....	666
8.3	Representasjoner.....	671
8.4	Visualisering og konkretisering.....	674
8.5	Det flerkulturelle aspektet.....	680
8.5.1	Flerkulturelle elever	681
8.5.2	Telling og tallord	683
8.5.3	Ord og symboler for brøk.....	686

8.5.4	Tid	688
8.5.5	Hvor mye eller hvor mange?	691
8.5.6	Leseretning	692
8.6	Tilpasset opplæring	694
8.6.1	Elever som sliter med matematikken	695
8.6.2	Elever som lykkes med matematikk	697
8.7	Kognitive kart	699
8.8	Diagnostisk undervisning	707
8.8.1	Misoppfatninger	708
8.8.2	Diagnostiske oppgaver	710
8.8.3	Oppfølging av diagnostiske oppgaver	712
8.9	Undersøkelseslandskap	716
8.9.1	Skovsmoses oppgavetyper	717
8.9.2	Didaktiske refleksjoner	720
8.10	Matematisk problemløsning	722
8.11	Læringsarenaer	726
8.11.1	Valg av læringsarena	727
8.11.2	Stasjonsundervisning	727
8.11.3	Selvstendig arbeid	728
	Referanser	729

Kapittel 9

Kunnskapsløftet 731

Kristin Ran Choi Hinna og Mona Røsseland

9.1	Læreplanhistorie	731
9.2	Matematikkfagets formål	733
9.3	Oppbygning av læreplanen i matematikk	736
9.4	Kjerneelementene i matematikk	737
9.4.1	Utforskning og problemløsning	738
9.4.2	Modellering og anvendelse	743
9.4.3	Resonnering og argumentasjon	746
9.4.4	Representasjon og kommunikasjon	751
9.4.5	Abstraksjon og generalisering	755
9.5	De matematiske kunnskapsområdene	762
9.5.1	Tall og tallforståelse	768
9.5.2	Algebra	769
9.5.3	Geometri	771
9.5.4	Statistikk og sannsynlighet	773
9.6	Tverrfaglige temaer	778
9.6.1	Folkehelse og livsmestring	778
9.6.2	Demokrati og medborgerskap	779

9.7	Grunnleggende ferdigheter	780
9.7.1	Muntlige ferdigheter i matematikk	780
9.7.2	Å kunne skrive i matematikk	781
9.7.3	Å kunne lese i matematikk	781
9.7.4	Digitale ferdigheter i matematikk	782
9.7.5	Å kunne regne i andre fag	783
9.8	Overordnet del	795
9.8.1	Menneskeverd	796
9.8.2	Identitet og kulturelt mangfold	797
9.8.3	Kritisk tenkning og etisk bevissthet	797
9.8.4	Skaperglede, engasjement og utforskertrang	798
9.8.5	Respekt for natur og miljøbevissthet	798
9.8.6	Demokrati og medvirkning	799
9.9	Internasjonale trender i læreplanutvikling	800
9.9.1	Eksempel fra Singapore	801
9.9.2	Eksempel fra USA	803
9.9.3	Eksempel fra Finland	805
	Referanser	807
	Om forfatterne	810
	Bildeliste	813
	Stikkord	817

Velkommen til studiet

Matematikk brukes overalt i samfunnet, også på mange områder hvor du ikke tenker over det. All moderne teknologi hadde vært utenkelig uten matematikk. Dessuten er matematikken nødvendig for å forstå verden rundt oss og for å delta i demokratiet og forstå samfunnsutviklingen. I grunnskolelærerutdanningen rettet mot undervisning på 1.–7. trinn er matematikk og norsk obligatoriske fag, og ferdigheter i disse fagene er sentrale for elevenes læring også i andre fag. Målet med denne boka er å hjelpe deg til å bli en trygg og god matematikklærer. Du vil naturlig nok finne mye matematikk i boka, men vinklingen er hele tiden preget av målet om å bli en god matematikklærer for elever på barneskolen. Mye fagstoff vil du gjenkjenne, men kanskje er det uvant at så mye oppmerksomhet rettes mot forståelse av faget.

Gode og dyktige matematikklærere er til inspirasjon for elevene. Det er viktig at du som matematikklærer er glad i faget og har en god faglig ballast. Mange, både voksne og barn, gir uttrykk for at matematikk er et fag som vekker følelser. Ber du dem fortelle hva de tenker på når de hører ordet matematikk, er det påfallende mange negativt ladede ord som blir nevnt. Ord som vanskelig, komplisert, kjedelig, frustrerende, avanserte tegn, abstrakt og pugging er noe som går igjen. Det er ikke slike ord vi ønsker at elevene våre skal assosiere matematikk med. Vi ønsker at du og elevene dine skal tenke på ord som spennende, givende, interessant, lek og fantasi, mønster, forståelse, vakkert, morsomt, lærerikt og viktig. Som lærer må du ha faglig innsikt for å kunne gi elever passende utfordringer slik at de opplever mestring, samtidig som de strekker seg mot ny kunnskap. Med en god faglig forankring er det lettere å improvisere, følge opp elevenes resonnement og kunne tilrettelegge for alle elevene i klassen.

Kanskje har du tidligere sett på matematikk som en samling av formler som skal pugges, og framgangsmåter som skal drilles. Vi ønsker å framheve et matematikkfag hvor forståelse og utforskning skal være grunntanken. Regning med de fire regneartene behøver ikke å være tørt, men mange forbinder dette med å følge puggede framgangsmåter. Forståelse, begrunnelser, problemløsning og kreativitet er viktige sider ved matematikken som også styrker elevens ferdigheter, men som ikke minst gjør faget mer spennende og meningsfullt.

Selv om du forstår hva foreleseren din på høgsolen eller universitetet sier i timene, er det ikke sikkert at du er i stand til å forklare og løse oppgaver på egen hånd etterpå. Det holder ikke å se på at andre viser hvordan du løser matematikkoppgaver, du må arbeide og utforske selv. Det gjelder også forklaringer rettet inn mot elever – hvordan kan du forklare slik at elever forstår? Det kreves en solid arbeidsinnsats der du leser på egen hånd, diskuterer med medstudenter og gjør utprøvinger i praksis.

Oppbygning

De første seks kapitlene, Tall, Algebra, Geometri og måling, Statistikk og sannsynlighet, Matematisk resonnering, argumentasjon og bevis på barnetrinnet og Programmering i matematikkundervisningen, er den matematikkfaglige delen av boka, selv om programmering er nytt med LK20, og ikke tradisjonelt er regnet som en del av matematikkfaget. Matematikken knyttes hele tiden til elevene du skal møte, og jobben du skal gjøre som matematikklærer. Dessuten viser vi at matematikk er en menneskelig aktivitet som er en del av kulturen og har utviklet seg over tid. Dette framheves blant annet ved at vi trekker inn historiske eksempler og matematikk fra andre kulturer. En viktig side ved faget er at det brukes på en rekke områder og bidrar til beskrivelse og forståelse av verden omkring oss. Faget kan heller ikke forstås hvis elevene utelukkende forholder seg til matematiske symboler og framgangsmåter.

Kapittel 7, 8 og 9 er didaktiske kapittel, hvor helhetlig matematikkundervisning, ulike didaktiske verktøy og dagens læreplanverk for barnetrinnet blir diskutert. Vi ser på hvordan du som lærer kan tilrettelegge for elevers læring ved å ta hensyn til både eleven som individ og eleven som en del av kulturen.

Sammenheng og helhet

Denne boka skal ikke leses som en roman i rekkefølge fra første til siste side. Det er mulig å lese hvert kapittel for seg, men kryssreferansene kan bidra til en større forståelse mellom ulike deler av matematikken og matematikdidaktikken. Ved første gangs lesning er det naturlig å hoppe over de fleste kryssreferansene, men etter hvert som du kommer lenger ut i studiet, kan du styrke forståelsen din ved å slå opp stadig flere av dem. Du må kunne matematikken på en annen og dypere måte som lærer enn da du var elev. For å få et godt lærerperspektiv på studiet bør du arbeide parallelt med faglige og didaktiske emner.

Forklaringer

Det brukes mye plass til forklaringer i form av tekst, bilder og figurer. Matematikk består av en rekke ideer og tenkemåter som ikke kan formidles bare ved å skrive ned utregninger og matematiske symboler. Matematikken preges blant annet av en rekke er, som for eksempel primtall og kvadrat. Alle matematiske begreper har en definisjon, men de trenger også en forklaring i tillegg til definisjonen. Historiske eksempler er et av bokas virkemidler til å formidle ideer som du ikke selv uten videre kan se fra en formell framstilling av matematikken. Forklaringer og diskusjoner om hvordan du kan legge til rette for elevers læring av de faglige emnene er en viktig del av boka.

Eksempel

Når et eksempel viser en framgangsmåte, markeres det med «Løsning». Når eksempler forklarer ideer, og ikke bare framgangsmåten, blir dette markert med «Diskusjon».

Definisjoner og setninger

Definisjoner klargjør den formelle betydningen av matematiske eller pedagogiske begreper og matematiske symboler. Teksten før og etter en definisjon trekker i tillegg fram intuisjon og ideer som er nødvendige for å bruke og forstå definisjonen.

Setninger er generelle sanne matematiske påstander eller rådende pedagogiske prinsipper. Definisjoner og setninger er skilt ut med rammer.

Oppgaver

Oppgaver kommer på slutten av delkapitlene. Det betyr ikke nødvendigvis at du skal lese all teksten i et delkapittel før du arbeider med oppgaver. Noen få steder ber vi deg i selve teksten å tenke over noe før du fortsetter, men du bør ha en reflekterende og utforskende tilnærming hele tiden. Læring av matematikk skjer gjennom en veksling mellom ulike arbeidsformer, inkludert lesning av bokens tekst, arbeid med oppgaver og utforskning. Noen oppgaver øver på teknikker og løsningsmetoder, men det er også mange oppgaver der du alene eller sammen med andre studenter blir bedt om å utforske, reflektere over, å forklare eller å lage egne eksempler, oppgaver eller undervisningsopplegg. Også du som student er et skapende individ i møtet med samfunn og kultur. Du skal både sette deg inn i den matematiske og pedagogiske kulturen og selv aktivt gjøre kunnskapen til din egen og bruke den i nye situasjoner.

Lykke til med et spennende emne

Foran deg har du et studium i matematikk på 30 studiepoeng som kan være fordelt på opptil to år. Du vil kanskje oppleve frustrasjon og motgang underveis, men husk at det er ved å arbeide deg gjennom motgang at du kan oppleve virkelig framgang. Vi håper at du får glede av faget, og at du bringer denne gleden videre til elevene dine.

Reinert A. Rinbold, Kristin Ran Choi Hinna, Trond Stølen Gustavsen og Trude Sundtjønn

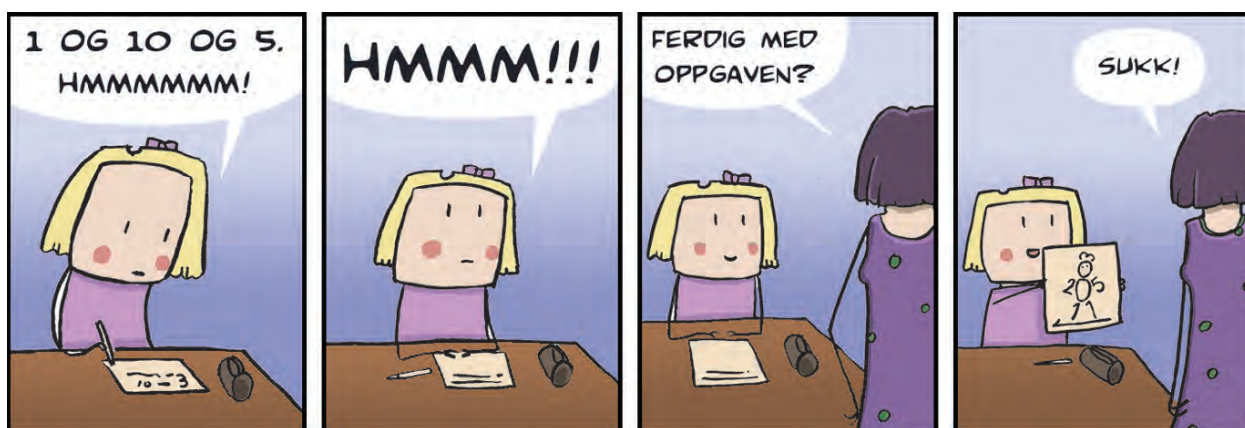
Tall

Fra boka *Den lille prinsen* har vi hentet dette avsnittet om tall:

De voksne elsker tall. Hvis du forteller dem om en ny venn, spør de aldri om vesentlige ting. De spør aldri: «Hvordan var stemmen hans? Hva er det han helst leker med? Samler han på sommerfugler?» Nei, de spør: «Hvor gammel er han? Hvor mange søsken har han? Hvor meget veier han? Hvor meget tjener hans far?» Og først da tror de at de kjenner han. Dersom du sier til en voksen: «Jeg har sett et nydelig rødt steinhus med geranier i vinduet og duer på taket», så kan de slett ikke tenke seg hvordan det ser ut. Du skal si: «Jeg har sett et hus til hundre tusen franc.» Og da vil de rope: «Å, så nydelig det er!»

Saint-Exupéry (1998)

Før du fortsetter: Bruk noen minutter til å skrive ned litt av det du vet om tall, og lag et tankekart over begreper knyttet til tall.



1.1 Hva er tall?

Selv om tall er noe du møter i hverdagen og har kjent til i store deler av livet, er det likevel ikke helt enkelt å forklare hva tall er. Du møter tall i skolens matematikktimer, og også i andre fag og utenom skolen. Mange elever har dessverre vansker med å se sammenhengen mellom matematikktimenes tall og hverdagstallene. Dette er synd, for da mister de både gleden ved å anvende matematikk og rike kilder til forståelse av faget. Vi skal se hvordan elevene kan møte tallene i skjæringspunktet mellom sin egen virkelighet, skolens matematikkfag og kulturen rundt oss.

Tall har ulike funksjoner alt etter hvilken sammenheng eller situasjon de opptrer i. Telling er kanskje det første du forbinder med tall. Svært mange ting kan telles, for eksempel bøkene i et bibliotek. Det som telles, er knyttet til spørsmålet «hvor mange?». Temperatur oppgis også ved hjelp av tall, men temperaturer måles snarere enn telles. Spørsmålet som svarer til måling, er «hvor mye?». Postnummer uttrykkes også ved tall. Det er et system innført av Posten for at brev effektivt skal komme dit de skal. For eksempel har steder nær hverandre ganske like postnummer. Vi finner imidlertid ikke fram til et steds postnummer verken ved å telle eller å måle. Alle norske statsborgere har også sitt eget tall med elleve siffer, nemlig personnummeret. Dette nummeret begynner med personens fødselsdato. I sitatet fra *Den lille prinsen* bruker forfatteren tall som antall, for eksempel «hvor mange søsken?». Spørsmålet «hvor meget veier han?» dreier seg derimot om målte tall. Det som måles, kalles ofte *mengde*. Bruker vi samme slags tallforståelse når vi teller, måler og regner?

Figur 1

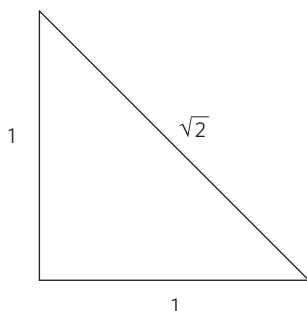


Et interessant filosofisk spørsmål er om tall er oppdaget eller oppfunnet. Det er ikke sikkert du har tenkt gjennom dette, men spørsmålet kan være et flott utgangspunkt for å samtale med elever om hva tall er. Det er en vanskelig problemstilling som neppe har et entydig svar. Hva betyr det så at et tall er oppdaget eller oppfunnet? Kan vi si at forholdstallet mellom omkrets og diameter, π , er oppdaget eller oppfunnet? Er tallet 3 oppdaget eller oppfunnet? Samlinger av tre objekter finnes uten tvil i verden rundt oss, for eksempel slik det er vist til venstre i margen.

Kanskje har vi oppfunnet tallsymbolet 5 og det abstrakte begrepet «fem», men oppdaget konkrete samlinger av fem objekter? I matematikken kaller vi samlinger av objekter av samme type for *mengder*, se definisjon 1. Når ordet brukes i entall, mengde, kan det sammenblandes med størrelser som måles. Som nevnt ovenfor, kalles det også for mengde. Mengden av vann i Mjøsa betyr hvor mye vann det er i denne innsjøen. Sand kan kanskje i prinsippet telles, men «hvor mye?» er det naturlige spørsmålet å stille også i det tilfellet.

Tallene har også ideologisk eller filosofisk betydning innenfor noen kulturer. Mest kjent er kanskje filosofien til de greske tallmystikerne, kjent som pytagoreerne. For dem var alt knyttet til det som kan telles. Tall for dem var det som kan telles, eller som er et forhold mellom tall. De godkjente altså positive hele tall og brøker hvor teller og nevner er positive hele tall. En av deres egne oppdaget imidlertid at det finnes såkalte *irrasjonale tall*, tall som ikke er blant de godkjente.

Figur 2



Kvadratrota av 2, skrevet $\sqrt{2}$, er lengden av den lengste siden i en rettvinklet og likesidet trekant hvor lengdene til de to like lange sidene er én lengdeenhet. Vi skal se i kapittel 1.8 at $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall, dvs. et tall som ikke kan skrives som en brøk eller et forhold mellom hele tall. En legende sier at oppdagelsen av irrasjonale tall fikk katastrofale følger. Det fortelles at oppdageren fikk en møllestein rundt halsen og ble kastet i Middelhavet.

I gresk filosofi er det ikke bare pytagoreerne som er kjent for å ha vært opptatt av tall. Platon mente at tallene er universets harmoni, og Aristoteles hevdet at alle tings opprinnelse og substans er i tallene. Det samme finner vi igjen i hinduismen. Kirkefader Augustin er også kjent for å være en av historiens store filosofer. Han knyttet universets oppbygning til sitt platoniske syn, der tall er til før skapelsen.

Definisjon 1

Mengde¹ (samling av objekter)

En mengde er en samling av objekter av samme type. Objektene kalles elementer.

Poenget med mengder i grunnskolematematikken er at de inneholder ting som kan telles. Flere forutsetninger må være oppfylt for at noe kan telles. En av disse er at det som telles, må kunne sees som eksempler på samme type ting.

Figur 3



Kronestykker er uten tvil samme type ting. Figur 3 viser fire slike.

¹ Bertrand Russell (1872–1970) innførte typeteorien som innebærer at alle elementer i en mengde har samme type. Ideen er i dag mest kjent i forbindelse med datatyper knyttet til programmering. Den matematikdidaktiske begrunnelsen for å holde seg til én type objekter i mengder er å gjøre telling meningsfull, og at mengder skal være lett å oppfatte for barn. Hensikten bak å telle noe gir opphav til en datatype, og hensikten krever et begrep. Et eksempel er begrepet «kjøkkenredskap» som kan motivere telling av mengder som består av kniver, gafler, skjeer etc.

Figur 4



Objektene i figur 4 er av samme type, for de er alle mynter. Likevel er det langt mindre naturlig å telle disse myntene enn de fire kronestykkene. Kanskje bare myntsamlere ville telle fire forskjellige mynttyper. Når barn skal lære telling, bør vi passe på at barnet oppfatter det som telles som eksempler på samme type ting eller fenomen, for eksempel to bamser. Å oppfordre barn til å sortere gjenstander etter type, for eksempel bamser for seg og biler for seg, bidrar til å bevisstgjøre barn om at tingene rundt dem kan samles i mengder av samme slag eller type. Barn må ikke bare lære å telle, men også lære hva som er fornuftig å telle.

Definisjon 2

Naturlige tall

Naturlige tall, $\mathbb{N}$, er det samme som de positive hele tall, altså de tallene vi kan bruke til å telle elementene i mengder. $\mathbb{N}_0$ er hele positive tall og 0.

Vi vil, med ett unntak, videre i dette kapittelet holde oss til de naturlige tallene. Null regnes noen ganger som et naturlig tall, men tallet null er spesielt og ble ikke akseptert før lenge etter de positive hele tallene. Vi kan nemlig ikke telle ingenting. Null er likevel nyttig som størrelsen på en tom mengde. I stedet for å si «ingen mynter», kan vi si 0 mynter. Lenge før tallet 0 ble godtatt, ble 0 tatt i bruk som en *plassholder*, se kapittel 1.3.4. I tallet 20 er 0 en plassholder som betyr at det er ingen enere. Først når vi godtar 0 som et svar på regnestykker av typen $17 - 17 = 0$, kan vi kalle 0 et tall. Også i barns læring av tall er det 0 som plassholder som bør komme først, selv om det ikke er uvanlig at 0 tidlig innføres som et synonym for «ingen».



Brøker og desimaltall er nødvendige for å utføre målinger. De brukes for å svare på spørsmålet «hvor mye?». Da dukker «mengde» i den andre betydningen opp.

Definisjon 3

Målbare størrelser (mengde)

Størrelser som kan måles, kalles målbare. De måles med brøker eller desimaltall. Hvor mye vi har av tid eller en tredimensjonal størrelse, kalles mengden av det vi snakker om.

Eksempler på målbare størrelser er lengde, areal, vekt, tid og volum. Vi sier «hvor mye bær?», «hvor mye tid?» og «hvor mye vann?». Svar på disse spørsmålene kan være «en mengde bær», «mengder av tid» eller «en mengde vann». Derimot sier vi «hvor lang?» eller «hvor stor flate?» knyttet til det en- og todimensjonale. Når vi ser på tauet som noe fysisk og romlig, kan vi si «hvor mye tau?» og «en mengde tau». Tall som målte størrelser er betydningsfulle for vår virkelighetsoppfatning. Måling av tid påvirker oss langt mer enn vi tenker over. Samfunnet hadde vært et helt annet uten. Mange er også opptatt av hva de veier. Andre eksempler er farten til bilen du kjører, eller arealet av huset du bor i. Det siste kan ha betydning for hvor mye skatt du betaler. Måltall muliggjør også sammenlikninger. Utsagn som «jeg er større enn deg» eller «jeg er raskere enn deg», kan gjøres presise. Hurtighet kan for eksempel defineres som tiden en person bruker på å løpe en sekstimeter. Du kan lese mer om måling i kapittel 3.6.

1.2 Ulike aspekter ved tall

Det du først og fremst forbinder med tall, er kanskje telling og *antall*. En annen bruksmåte er måling. Vi måler i liter, meter, timer osv. Tall brukt til måling kalles *måltall*. Måling og måltall tas opp i kapittel 3.6. Husnummer er verken knyttet til antall eller måling. Derimot er rekkefølgen viktig. Hus nummer 84 kommer etter hus 82. Vi kaller denne bruken for *ordenstall*. En fjerde bruksform er *tall som identifikasjon*. Pinkoder og telefonnumre er eksempler. Niels Chr. Geelmuyden (2002) skriver i *SAS Magasinet* at det er 212 meningsløse tall som romsterer i hodet vårt: Pinkoder, kontonumre, telefonnumre osv. Disse tallene har verken framkommet ved telling, måling eller ved å ordne i rekkefølge. Vi kaller det tall brukt som *identifikasjon*. Personnummer, bilnummer og nummer på bussruter er andre eksempler.



I forsvaret er du «843-7 Jansen», åttende kompani, fjerde tropp, lag tre, køye sju. Dette er med på å skape avstand og å avpersonifisere personer. Under krigen hadde krigsfanger et nummer, ingen navn, noe som gjorde det «lettere» å avrette personer. Nr. 56 798 er lettere å skyte enn Kristoffer Jansen. Det er vanskeligere å slakte Litago enn NRF-37. Bruk av tall framfor navn kan derfor ha etiske konsekvenser.

Vi er alle identifisert med et personnummer. Professor Ernst S. Selmer (1920–2006) utviklet personnummersystemet vi har i dag, og som har vært i bruk siden 1964. Han laget det som en kode der de fleste feiltastinger kan avsløres fordi de to siste sifrene er kontrollsifre. Kontrollsifrene regnes ut ved hjelp av de 9 første sifrene. Vi kommer tilbake til kontroll av personnummer i oppgave 88 (side 275) i kapittel 2.8.2.

1.3 Et historisk blick på tallsystemets utvikling

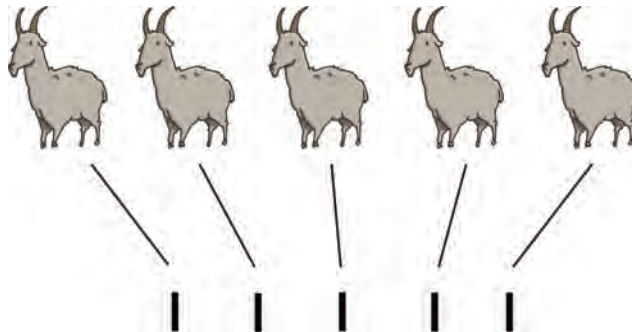
Hva er motivasjonen og behovet bak utviklingen av tallene? Forståelse av hvordan vårt tallsystem har utviklet seg, kan gi deg forståelse av den utviklingen som foregår hos barnet. Arbeid med utviklingen av tall og tallsystemer kan gi deg erfaring med hvor vanskelig og genialt dagens tallsystem er, og det kan gi deg ideer til å støtte barns læring. I dagens multikulturelle klasserom er det stor sjanse for at du møter elever med ganske andre erfaringer enn dine egne, se kapittel 8.5. Kunnskap om hvordan tallene har utviklet seg i ulike kulturer, er nyttig også for å møte elever med bakgrunn fra andre land. Erfaring med andre tenkemåter og uttrykksformer styrker muligheten til å kunne møte slike elever på en god måte.

Folk har tidlig hatt behov for å få oversikt over eiendelene sine. I 1937 fant man i Tsjekkia et ulvebein med 55 hakk, gruppert i femmergrupper.

Funnet er anslått til å være 30 000 år gammelt. Sannsynligvis har eieren av beinet laget et hakk for hver eiendel, hvert byttedyr eller liknende.

Koblingen mellom eiendeler og hakk i et bein er et eksempel på et fenomen vi i matematikken kaller *en-til-en-kobling*.

Figur 5



Her er det laget en strek eller et hakk for hver geit. Hver strek er *koblet* med en geit, og hver geit er koblet med en strek. Derfor kalles det en-til-en-kobling.

Figur 6



På beinet som ble funnet i Tsjekkia, var det et dobbelthakk ved markering nummer 25. Kombinert med grupperingen i femmere har dette noe til felles med det vi i dag kaller et femtallsystem. Et slikt tallsystem er som vårt titallsystem, bortsett fra at *grunntallet* eller *basen* er fem i stedet for ti. I et femtallsystem er utgangspunktet grupperinger på fem.

Her markerer sirkelen ei gruppe på fem trekantene. I neste omgang kan vi danne ei gruppe av fem slike sirkler:

Figur 7



I vårt tallsystem skriver vi dette som 25. Grunnen er at vi tenker trekantene gruppert i 2 tiere og 5 enere. Det er imidlertid mulig å holde seg utelukkende til gruppering i femmere, se kapittel 1.3.6. Ei hånd består av fem fingre. Historisk har trolig kroppen vår hatt avgjørende betydning for hvordan vi grupperer.

Eksempel 1



Kroppslig opphav til gruppering

Hender og føtter gir opphav til grupperinger i femmere (ei hånd), tiere (begge hendene) og tjueere (hendene og føttene).

Alle disse grupperingene har vært brukt historisk. Gruppering i 20 ble brukt av mayaene. Også andre grunntall har vært brukt, og spesielt kjent er babylonernes bruk av 60, se kapittel 1.3.4. I dag har vi rester

etter dette systemet med grupper på 60. En time er delt inn i 60 minutter, og et minutt er delt inn i 60 sekunder. Noe liknende brukes i vinkelmåling.

Vi skal dele utviklingen fram til dagens tallsystem inn i additive tallsystemer, siffersystemer, multiplikative systemer og posisjonssystemer. Langt på vei er dette en utvikling fra enklere til mer avanserte systemer, men det er ikke helt entydig. Eksempler som likner på historiske tallsystemer, kan brukes for å gi elever en enklere læringsvei. Det samme kan rester av gamle tallsystemer som fortsatt finnes i bruk.

1.3.1 Additive tallsystemer

I det gamle Egypt ble hieroglyfene utviklet ca. 3500 f.Kr. Tallene i dette skriftspråket hadde ti som grunntall og egne symboler for enere, tiere, hundrere osv. som vist under:

$| = 1$, $\cap = 10$, $\text{e} = 100$, $\text{I} = 1\,000$, $\text{r} = 10\,000$,

$\text{u} = 100\,000$, $\text{y} = 1\,000\,000$, $\text{o} = 10\,000\,000$

Eksempel 2

Additive hieroglyfer

Tallet 1 234 567 skrives  ■

Kjennskapet til disse tallene kommer fra to papyrusruller, Moskva-papyrusen, som inneholder geometri, og Rhind-papyrusen, som inneholder tallregning. Forskerne er ikke sikre på hva disse papyrusrullene ble brukt til, men kanskje har de vært lærebøker for skriverne til faraoen.

I et additivt tallsystem legger man sammen verdiene til de enkelte tallsymbolene. Mynter er et eksempel på dette som fortsatt eksisterer. For å finne ut hvor mye penger dette er, har rekkefølgen av myntene ikke noe å si.

Figur 8



Eksempel 3

Ulike rekkefølger

Tallet 2344 kunne skrives på ulike måter:

$\text{II} \text{m} || \text{eee}$ eller $\text{m} || \text{eee} \text{II}$ ■

Greske attiske eller akrofone tallsymboler fra ca. 500 f.Kr. hadde også ti som grunntall. Her er noen av symbolene:

$|$ = 1, Γ = 5, Δ = 10, P = 50, H = 100,

P = 500, X = 1 000, P = 5 000

Vi kan gjenkjenne den moderne greske bokstaven Δ : delta. Tegnet Γ ser ut som en stor gamma, men er et gammelt tegn for π , pi.

Også romertallene var opprinnelig et additivt tallsystem med $I = 1$, $V = 5$, $X = 10$, $L = 50$, $C = 100$, $D = 500$ og $M = 1000$.

Romerne videreutviklet senere systemet med at de trakk fra talltegn til venstre for et tegn med høyere verdi. For eksempel erstattet $IV = 5 - 1 = 4$ det opprinnelige $IIII$, og $VIII$ ble erstattet med $IX = 10 - 1 = 9$.

Eksempel 4

Klokke med romertall



Estetiske hensyn

Ser du på ei klokke med romertall på tallskiven, kan 9 være skrevet IX, men 4 som IIII. Dette er gjort av hensyn til det estetiske. ■

Romerne gjorde utregninger ved hjelp av regnebrett eller kuleramme, og så skrev de svaret ned med romertall etterpå. Vårt tallsystem er overlegent romertallene ved at vi ikke er avhengig av slike hjelpemidler, men kan gjøre utregninger innenfor tallsystemet, se kapittel 1.5.

1.3.2 Siffersystemer

Som nevnt i kapittel 1.3.1 hadde egypterne først et additivt tallsystem skrevet med *hieroglyfer*. De ble brukt på tempelvegger og gravert inn i kolonner. For å skrive på papyrus utviklet de ca. 2500 f.Kr. et enklere system, hieratisk skrift, hvor hvert av tallene fra 1 til 9 fikk sitt eget siffer i stedet for like mange streker som antallet. Tilsvarende hadde hvert av tallene 10, 20 ... 90 og 100, 200 ... 900 hvert sitt siffer. Denne typen system kalles et *siffersystem*.

Under har vi oppgitt sifrene fra 1 til 7:

$|$ $||$ $|||$ $—$ 7 $||||$ 2
1 2 3 4 5 6 7

Eksempel 5**Hieratiske hieroglyfer**

Tallet 37 ble skrevet med symbolet for 7 ved siden av symbolet for 30. Siden $7 = \text{𐦏}$ og $30 = \text{𐦏𐦏}$, får vi $37 = \text{𐦏𐦏𐦏}$. Da $3 = \text{𐦏}$ og $40 = \text{𐦏𐦏𐦏}$ og $200 = \text{𐦏𐦏𐦏𐦏}$, blir $243 = \text{𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏𐦏}$.

Leseretningen til tallene er motsatt av vår. Enerne kommer til venstre, ikke til høyre som hos oss. Prikkene i symbolene for 30, 40 og 200 betyr ikke å multiplisere, men er en del av selve sifferet. ■

Noen ikke-vestlige kulturer leser samme vei som egypterne, se kapittel 8.5.6. Hva som er leseretningen for tall, er imidlertid ikke entydig. Når vi regner sammen $12 + 34$ med standardalgoritmen for addisjon, se kapittel 1.5.1.5, er det enerne vi leser først. Dette stammer fra at araberne leste fra høyre mot venstre, noe de gjør den dag i dag. I hoderegning begynner vi derimot ofte fra venstre og tar enerne til slutt, se kapittel 1.5.5.

I Hellas ble det greske alfabetet brukt som et siffersystem:

$\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, $\delta = 4$, $\iota = 10$, $\kappa = 20$, $\lambda = 30$, $\mu = 40$, $\nu = 50$

Eksempel 6**Greske alfabetbaserte tall**

Tallene 34 og 22 ble skrevet $\lambda\delta$ og $\kappa\beta$.

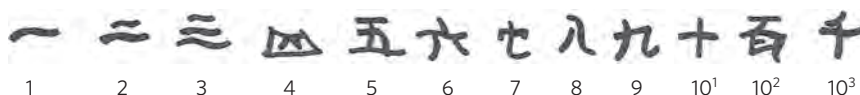
Hebraisk har et tilsvarende system. I lengden var ikke denne måten å gjøre det på holdbar, da stadig nye symboler måtte finnes opp for å uttrykke større tall. Et annet problem var at tall kunne leses som ord og ord som tall. Hva var tallet, og hva var selve teksten? Det måtte tolkes ut fra sammenhengen. ■

1.3.3 Multiplikative systemer

Det tradisjonelle kinesisk-japanske tallsystemet er et *multiplikativt system* med grunntall 10. Systemet oppstod ca. 1600 f.Kr. Vi har rester av et multiplikativt system i norsk språk når vi for eksempel sier «tre hundre og femti sju». Tre hundre betyr at vi har tre hundrere, dvs. at tre multipliseres med hundre. Tilsvarende vil femti si fem tiere, altså fem multiplisert med 10. Både vårt system og det kinesisk-japanske har symboler for tallene fra 1 til 9 og for *potenser* av 10. De første potensene av ti skrevet i vårt system, er $10 = 10^1$, $100 = 10^2$ og $1000 = 10^3$. Du finner mer om potenser i kapittel 2.6.

Her ser du de kinesisk-japanske symbolene for 1 til 9 og 10^1 til 10^3 :

Figur 9



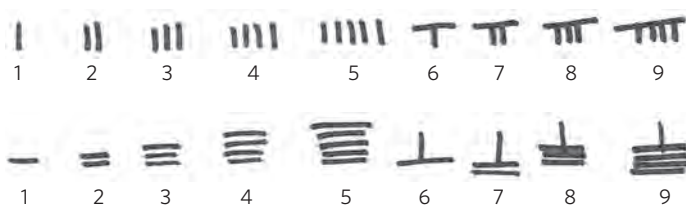
Det kinesisk-japanske systemet krever langt færre symboler enn siffersystemer som det hieratiske og det greske.

Eksempel 7**Tradisjonelle kinesisk-japanske tall**

Tallet 5923 skrives slik:

五	5
千	10^3
九	9
百	10^2
二	2
十	10^1
三	3

Det kinesisk-japanske systemet har trolig utviklet seg fra tidligere bruk av tellebrett. De kinesiske tellebrettene var bord med tellepinner som ble brukt til å utføre regneoperasjoner. Tellepinnene var små bambuspinner på ca. 10 cm. Pinnene kan legges enten vertikalt eller horisontalt:



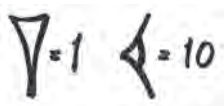
For å uttrykke tall større enn ti brukte kineserne et tierbasert plassverdi-system på tellebrettet. Denne ideen kan ligge bak vårt posisjonssystem.

Eksempel 8**Kinesiske tellebrett**

Tallet 1156 skrives slik: $\text{I} \text{---} \text{III} \text{ T}$. Fra venstre ser vi en vertikal og en horisontal ener fulgt av symboler for 5 og 6. Tallet 6083 skrives $\text{T} \text{ I} \text{ III}$. Det er en tom plass mellom T og I .

Styrken med et slikt tellebrett er at en tom posisjonsplass framkommer tydelig. I en skriftlig tekst kan det oppstå misforståelser om et mellomrom er ment eller ikke.

Figur 10
Kile og hakk



1.3.4 Posisjonssystemer

Det babylonske samfunnet hadde ca. 3000 f.Kr. utviklet et såkalt *cuneiformsystem*, som bestod av to symboler: *kile* og *hakk*, se figur 10 i marginen. Grunntallet i dette systemet var 60. Kilen symboliserte 1 og hakket 10.

Tall fra 1 til 60 ble skrevet på følgende måte:



Så langt er dette et enkelt additivt system som i kapittel 1.3.1. Fra 60 av innføres det imidlertid en ny posisjon som angir antall 60-ere. Selv om babylonernes system ikke er multiplikativt, er det et posisjonssystem. Dermed er det ganske avansert. De opererte med *plassverdier* som 60^3 , 60^2 , 60^1 og 1.

Tallet på den tilsvarende *plassen* angir hvor mange ganger plassverdien skal gjentas. I vårt tallsystem er 1, 10, 100 ... plassverdier. I tallet 256 betyr 2-tallet at det er to hundrere, 5-tallet at det er fem tiere og 6-tallet at det er seks enere.

Babylonerne kunne også uttrykke deler av enheten ved hjelp av de samme symbolene. Det vil si at kilen kunne stå for $60^{-1} = \frac{1}{60}$ og hakket for $\frac{10}{60}$. For potenser som 60^{-1} , se kapittel 2.6.1.

63	13	7	777
132	2,12	77	777
1547	25,47	7777	777777
		777	777777

Med moderne notasjon kan vi skrive babylonernes versjon av vårt 132 som $2,12_{\text{seksti}}$. Det står for to sekstiere og 12 enere, dvs. $2,12_{\text{seksti}} = 2 \cdot 60 + 12 = 132$.

Babylonerne selv brukte ikke komma, bare et mellomrom.

Eksempel 9

Moderne sekstitallsystem

25,47 i sekstitallsystemet blir tilsvarende

$$25,47_{\text{seksti}} = 25 \cdot 60 + 47 = 1500 + 47 = 1547$$

Eksempel 10

Kiletegn og sekstitallsystem

Tallet 13 357 skrives ved hjelp av babylonske kiletegn som

$$\text{I sekstitallsystemet er det } 3,42,37_{\text{seksti}} = 3 \cdot 60^2 + 42 \cdot 60^1 + 37.$$

Siden babylonerne ikke hadde et symbol for 0, var det lett å misforstå verdien av et tall. Deres notasjon for $3 \cdot 60^2 + 42 \cdot 60^1 + 37$, kunne også bety $3 \cdot 60^3 + 42 \cdot 60^2 + 37 \cdot 60^1$ eller $3 \cdot 60^3 + 42 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60^1 + 37$. Rundt 300 f.Kr. ble 0 som plassholder innført. Dermed ble slike misforståelser eliminert. Siffersystemer, som det tradisjonelle kinesisk-japanske tallsystemet, er ikke avhengig av symbolet 0 som plassholder fordi sifrene i seg selv har en bestemt tallverdi.

Mayaene (ca. 300 e.Kr.) utviklet et posisjonssystem med 20 som grunntall. De brukte et skjell  for å symbolisere en tom posisjonsplass. Her ser du mayaenes symboler for tallene fra 1 til 10:

Tabell 1 Mayasymboler for 1 til 10

									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

En prikk og to streker blir 11, to prikker og to streker blir 12 og tre streker blir 15. Tallet 16 ble ikke skrevet som tre streker og en prikk, men som en strek og en prikk fulgt av to streker. Siden 20 er grunntallet i systemet deres, blir 20 skrevet som , altså en ener og en null.

Eksempel 11

Mayatall

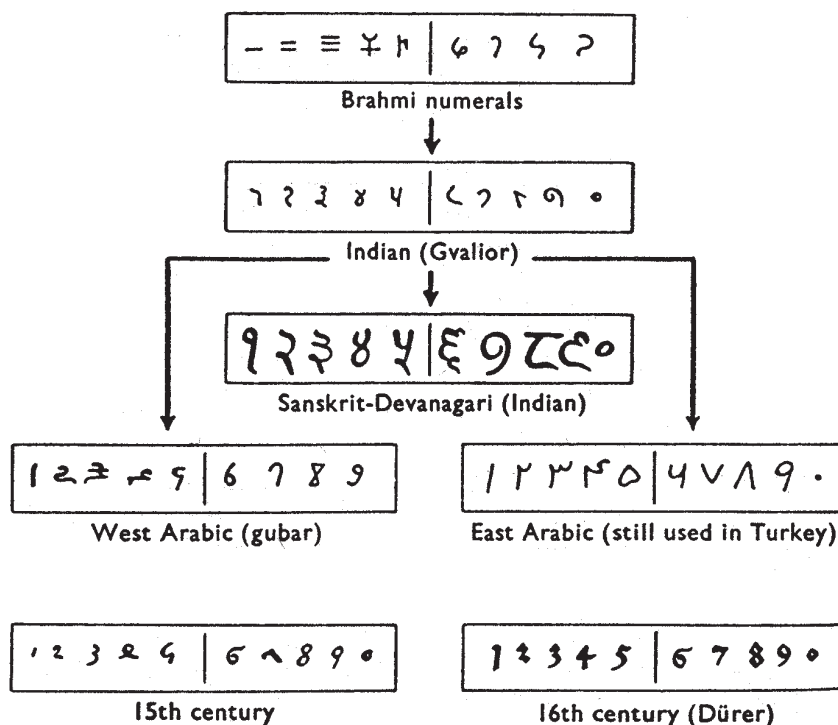
806 ble skrevet som $2 \cdot 20^2 + 0 \cdot 20^1 + 6 \cdot 20^0$ og ble notert som  ■

Et siffersystem, slik vi omtaler det i kapittel 1.3.2, trenger langt flere sifre enn et **posisjonssystem**. Med sifrene 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 og plassholderen 0 kan vi notere alle tall. Siden vi ser på for eksempel 40 som fire tiere og ingen ener, regner vi også 0 som et siffer. Systemet vårt kalles det hindu-arabiske tallsystem. Det har kommet fra India via de arabiske landene til Europa, se figur 11 øverst på neste side.

Selv om det hindu-arabiske tallsystemet i dag brukes over hele verden, varierer utseendet av de ti sifrene. I arabiske land brukes $\cdot ١٢٣٤٥٦٧٨٩$ i stedet for de vestlige sifrene 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Også i vestlige land er det små variasjoner. En kan skrives som 1, 1 eller I. Tallet 7 kan skrives med eller uten tversgående strek, 7. Du kan møte elever som er vant med annerledes sifre enn våre, se kapittel 8.5.

Figur 11

Utviklingen av de hindu-arabiske sifrene (Katz, 1993, s. 216)



1.3.5 Tallsystemet og representasjoner

Nå skal vi se nærmere på moderne posisjonssystemer. Slike posisjonssystemer kan ha ulike grunntall, men standardsystemet vårt har ti som grunntall, dvs. antallet fingre som et menneske normalt har. Grunntallet i posisjonssystemet skrives 10 og står for én tier og ingen enere. Den opprinnelige betydningen av tallordene elleve og tolv var en over ti og to over ti, som i tallsystemet noteres 11 og 12. Både sifrene fra 0 til 9 og sammensetninger av sifre som 11, 12 eller 347 er *tallsymboler*. Når vi skriver 2847, betyr det at vi har to tusener, åtte hundrere, fire tiere og sju enere. Betydningen kan også skrives ut med matematiske symboler, og kalles da *utviklet form*:

$$2847 = 2 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 1$$

Tallene 10, 100 og 1000 er, som nevnt i kapittel 1.3.3, potenser av 10. Vi har $100 = 10 \cdot 10 = 10^2$ og $1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$. Dessuten er $10^1 = 10$ og $10^0 = 1$.

Når eksponenten er et naturlig tall, skrives potenser med grunntall ti som 1 fulgt av bare nuller, for eksempel $10^4 = 10\,000 = 1 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$. Eksponenten er lik antall nuller.

Figur 12

Grunntall $\rightarrow 10^5$ $\leftarrow$ Eksponent

I tallet 2847 har sifrene 2, 8, 4 og 7 ulike betydninger. For eksempel står 2 for 2000 og 4 for 40. De forskjellige verdiene et siffer har avhengig av posisjonen, kalles sifferets *posisjonsverdi*. Fra høyre mot venstre er posisjonene henholdsvis enerplass, tierplass, hundrerplass osv. Plassverdiene er én, ti, hundre osv. Posisjonsverdien er plassverdien multiplisert med sifferet i den posisjonen.

Tabell 2 Plassverdier og posisjonsverdier med grunntall ti (10)

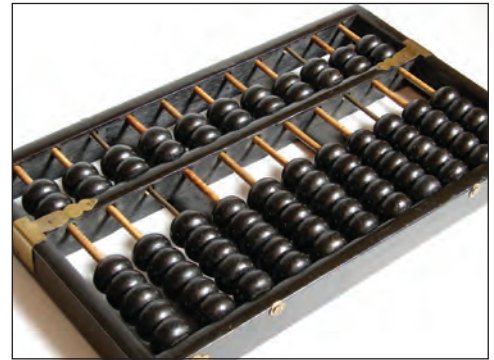
Posisjon fra høyre	...	6	5	4	3	2	1
Posisjonsverdi = antall	...	Hundre tusener	Ti tusener	Tusener	Hundrere	Tiere	Enere
Plassverdi	...	100 000	10 000	1000	100	10	1
Tierpotens	...	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0

I tallet 37 526 har sifferet 7 posisjon nummer 4 fra høyre. Det betyr at 7 står for 7000, dvs. at posisjonsverdien til sifferet er 7000. Sifferet 7 multipliseres med $10^3 = 1000$ for å få posisjonsverdien. Eksponenten 3 er én lavere enn 4, sifferets posisjon fra høyre.

Det hindu-arabiske systemet har trolig utviklet seg fra bruk av kulerammer og tellebord som ble brukt ved økonomiske transaksjoner. På bildene ser du en kinesisk abakus og et regnebord eller tellebord.

Figur 13

Tellebord (til venstre) og kinesisk abakus (til høyre)



Det er mulig å bruke en kinesisk eller japansk abakus i skolen, men på bildet øverst på neste side ser du en type abakus som er mer vanlig å bruke i skolen.

Figur 14
Skoleabakus



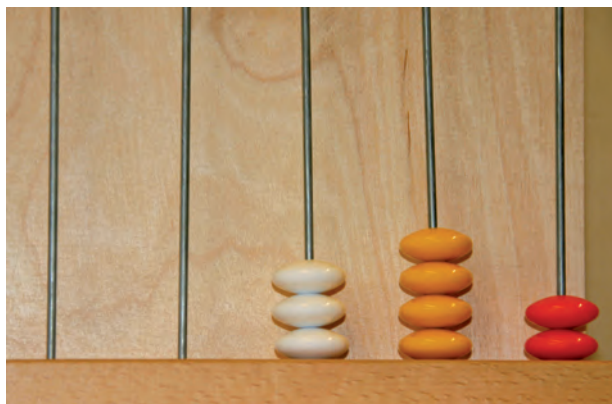
Den har to sider med en plate i midten. Kulene som ikke brukes, er skjult bak platen. De trekkes over framsiden etter hvert som det er bruk for dem.

Eksempel 12

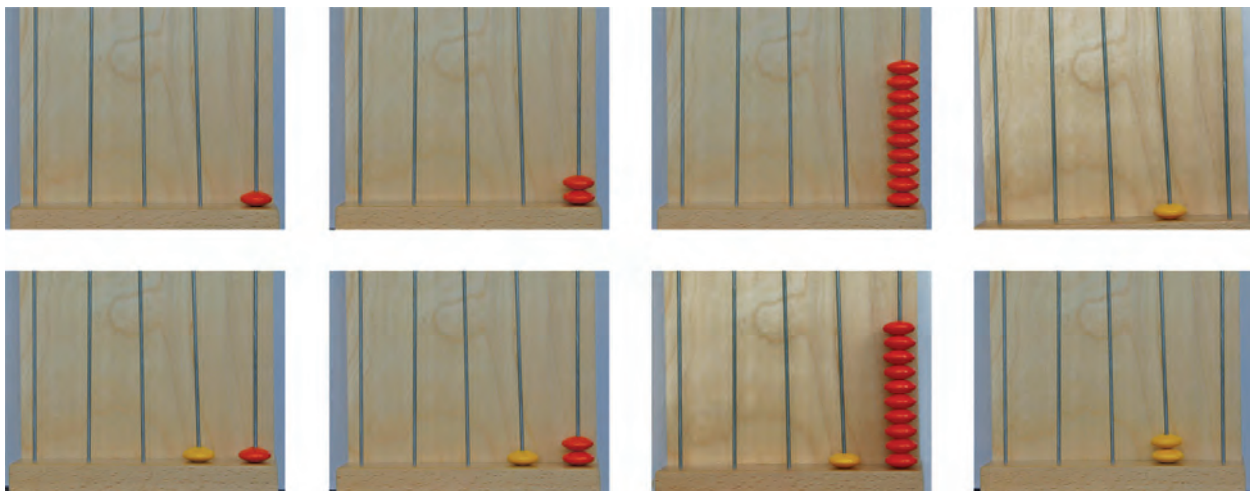
Skoleabakus

Vi ønsker å representere tallet 342. Da ser forsiden av abakusen ut som vist i figuren under.

342 representert på en skoleabakus



For å demonstrere telling med abakus i titallsystemet starter vi med å legge over en rød kule på den synlige siden. Alle de andre kulene er skjult bak platen. Vi har nå representert tallet 1. Vi løfter så én ny rød kule over på den synlige siden. Da er tallet 2 representert. På denne måten kan vi fortsette til det er ti røde kuler på bøylen lengst til høyre. Så veksler vi de ti røde til én gul kule på den neste bøylen og flytter derfor over én gul og tar tilbake de ti røde. For å telle videre fører vi igjen over én rød kule slik at vi har en gul og en rød kule. Dette representerer tallet 11.

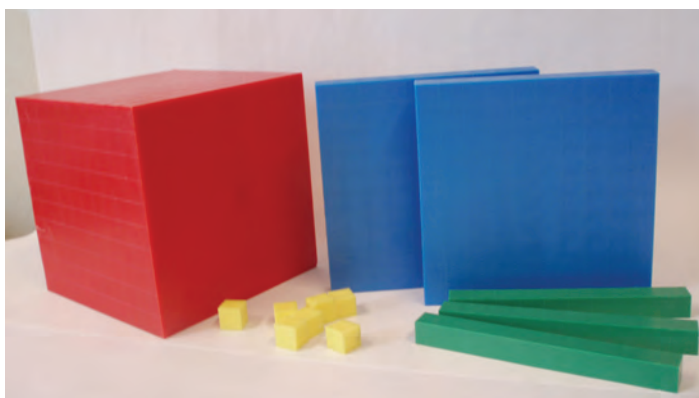
**Figur 15**

Telling og veksling på skoleabakus

Vi kan også representere tall ved hjelp av andre fysiske hjelpemidler. *Multibasemateriell* av plast, som du ser på bildet nedenfor, har vært mye brukt (Dienes, 1964).

Figur 16

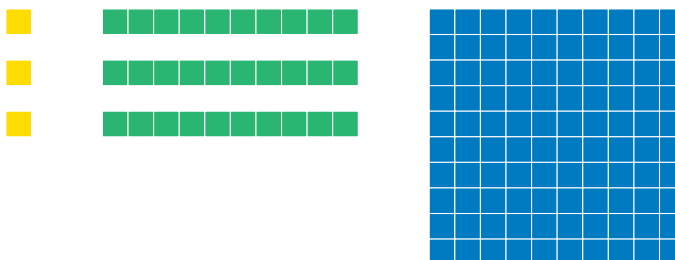
Multibasemateriell



Slikt materiell kan også tegnes eller lages av papp. Figur 17 viser enheter, staver og plater, tilsvarende enere, tiere og hundrere.

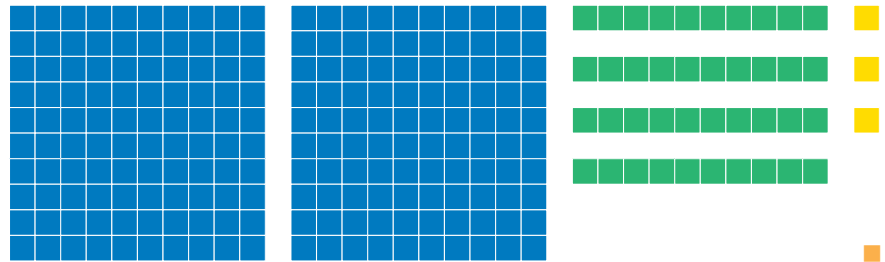
Figur 17

Enhet = 1, stav = 10 og plate = 100



Eksempel 13**Multibasemateriell**

Representasjonen av tallet 243 blir slik:



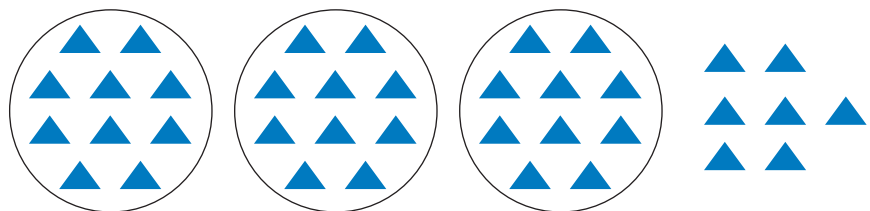
Det er en viktig forskjell mellom å representere tall på en abakus og å representere tall ved hjelp av plater, staver og enheter. På abakusen representerer de ulike strengene ulike posisjonsverdier. Dette betyr at en kules verdi er forskjellig, avhengig av hvilken streng den sitter på. For multibasemateriell, derimot, har en enhet alltid samme verdi. Multibasemateriell er derfor et additivt tallsystem, se kapittel 1.3.1, mens abakusen er et additivt posisjonssystem.

1.3.6 Posisjonssystemer med andre grunntall

Du bruker titallsystemet hver dag, men en grunnskolelærer må ha en dyp forståelse av tallsystemet som går utover det å kunne bruke tall i dagliglivet (Ball, 2003). For å utvikle en slik forståelse er det hensiktsmessig å arbeide med posisjonssystemer med andre grunntall. Dette kan gi deg opplevelser som minner om elevers møte med titallsystemet. Telling og regning er for mange voksne så automatisert at det skaper en falsk følelse av å forstå posisjonssystemet. Når du prøver å regne med andre grunntall, kan det vise seg at forståelsen ikke er så god som du trodde. Å kjenne problemene på kroppen kan gjøre det lettere for deg å legge opp en hensiktsmessig undervisning. Å se et fenomen som et eksempel på noe mer generelt bidrar også til forståelse. Regning med tall skrevet i posisjonssystemer med andre grunntall enn ti, tas opp i forbindelse med de fire regneartene, kapittel 1.5.

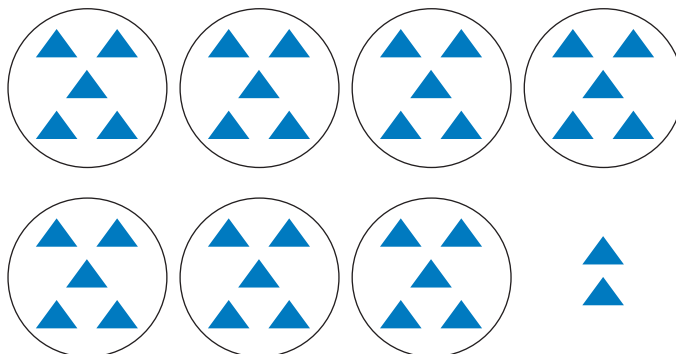
Allerede i starten av kapittel 1.3 var vi inne på at det er mulig med et posisjonssystem basert på gruppering i femmere i stedet for tiere. Tallet 37 består av 3 tiere og 7 enere:

Figur 18



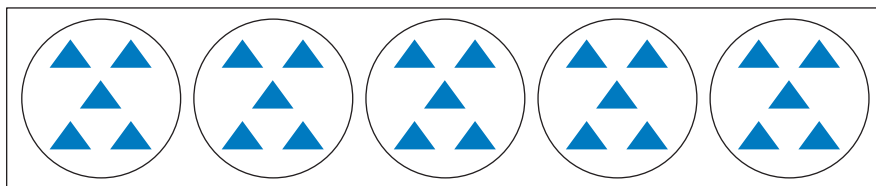
Hvis vi i stedet grupperer i femmere, får vi sju femmere og to enere:

Figur 19



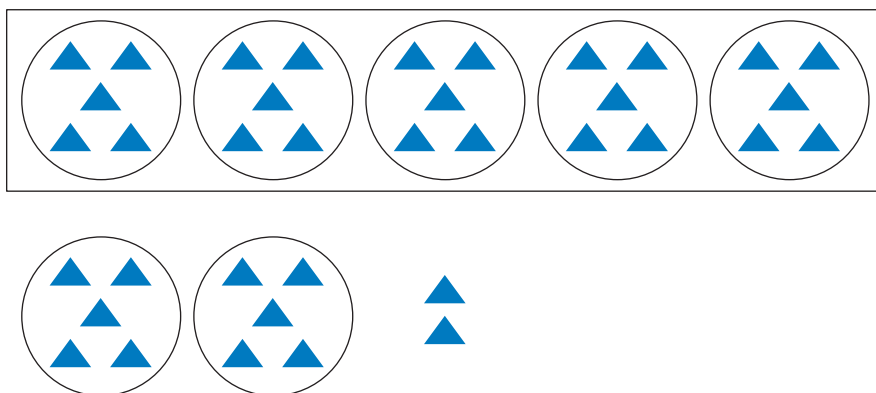
Det er uhåndterlig med så mange femmere, så vi setter fem av dem sammen til en gruppe:

Figur 20



Dette er samme idé som når vi slår sammen ti tiere i ei gruppe og kaller det hundre. De trettisju små trekantene blir dermed gruppert slik i femtallsystemet:

Figur 21



Vi har 1 gruppe av fem femmere, 2 grupper av fem og 2 enere. I femtalls-systemet skrives dette 122. Når vi arbeider med forskjellige tallsystemer, kan det oppstå uklarhet om hvilket grunntall vi bruker. For å få fram at et tall er skrevet i femtalltallsystemet, skriver vi «fem» med liten skrift nederst til høyre for tallet, for eksempel 122_{fem} .