

Matematikk for økonomi og samfunnsfag

Harald Bjørnstad
Ulf Henning Olsson
Svein Søyland
Frank Tolcsiner

Matematikk for økonomi og samfunnsfag

9. utgave

CAPPELEN DAMM AKADEMISK

© CAPPELEN DAMM AS, Oslo, 2021

ISBN: 978-82-02-62739-3

2. utgave, 2. versjon

E-utgaven baserer seg på 9. trykte utgave, Cappelen Damm Akademisk, 2018

Materialet i denne publikasjonen er omfattet av åndsverklovens bestemmelser. Uten særskilt avtale med forlaget er enhver eksemplarframstilling og tilgjengeliggjøring bare tillatt i den utstrekning det er hjemlet i lov eller tillatt gjennom avtale med Kopinor, interesseorgan for rettighetshavere til åndsverk.

Elektronisk tilrettelegging: [Bøk, Oslo AS](#)

Omslagsdesign: Kristin Berg Johnsen

Sats/design: [Bøk Oslo AS](#)

www.cda.no

akademisk@cappelendamm.no

Cappelen Damm AS er sertifisert iht. FSC®, PEFC og Miljøfyrtårn.



Symbolet for
bærekraftig skogbruk



Promoting Sustainable
Forest Management
www.pefc.org



Innhold

Forord til 9. utgave	11
-----------------------------------	-----------

KAPITTEL 1

Grunnleggende emner

1.1	Tall og tallsystemer	13
1.2	Regning med bokstaver: Algebra	14
1.3	Potenser og enkel brøkgning	21
1.4	Tall på standardform	32
1.5	Kvadratrot	34
1.6	Faktorisering	39
1.7	Kvadratsetningene	40
1.8	Brøker	44
1.9	Sum av brøker	48
1.10	Multiplikasjon og divisjon med brøker	55
1.11	Potenser med rasjonale eksponenter	58
1.12	Generelt om likninger	61
1.13	Likninger av første grad	62
1.14	Likninger av andre grad	65
	Faktorisering av andregradsuttrykk	72
1.15	Ulikheter	73
1.16	Likninger med to eller tre ukjente	79
	Metode 1	80
	Metode 2	80
1.17	Logikk	84
1.18	Irrasjonale likninger	88
1.19	Mengdelære	89

1.20	Regning med prosent	95
1.21	Gjentatte prosentoperasjoner	99
	Sammendrag av kapittel 1	101
	Oppsummerende oppgaver til kapittel 1	104

KAPITTEL 2 **Funksjoner**

2.1	Koordinatsystemet	113
2.2	Sirkelen	114
2.3	Funksjoner	117
2.4	Den lineære funksjonen	122
2.5	Den kvadratiske funksjonen	129
	Drøfting av den kvadratiske funksjonen	131
2.6	Polynomer og rasjonale funksjoner	136
	Rasjonale funksjoner	141
	Polynomdivisjon	142
	Divisjon med førstegradspolynomet $x - a$	145
2.7	Asymptoter	149
2.8	Kostnads- og inntektsfunksjoner	153
	Inntekts- og profittfunksjoner	155
2.9	Inverse funksjoner	157
	Sammendrag av kapittel 2	161
	Oppsummerende oppgaver til kapittel 2	163

KAPITTEL 3 **Derivasjon og funksjonsanalyse**

3.1	Ensidige grenser	169
3.2	Kontinuerlige funksjoner	174
3.3	Den deriverte til en funksjon	179
3.4	Derivasjonsregler	185
3.5	Derivasjon av produkt- og brøkfunksjoner	187
3.6	Derivasjon av sammensatte funksjoner	190
3.7	Implisitt derivasjon	194
3.8	Høyere ordens derivasjon	198
3.9	Tangenten til en graf	198
	Likningen for tangenten til en graf	199
3.10	Lokale ekstremalpunkter	200
3.11	Globale ekstremalpunkter	211
3.12	Anvendelse av den 2. deriverte	218

Annenderivert-testen	223
3.13 Funksjonsdrøfting	225
3.14 Grensekostnad, grenseinntekt, grenseprofitt, kostnadsoptimum .	230
Grensekostnad og grenseinntekt	230
Kostnadsoptimum	231
3.15 Profittmaksimering, Vinningsoptimum	235
3.16 Elastisiteter	240
Sammendrag av kapittel 3	247
Oppsummerende oppgaver til kapittel 3	250

KAPITTEL 4 Eksponensial- og logaritmefunksjoner

4.1 Eksponensialfunksjonen	265
4.2 Tallet e , Eulers tall	270
Kontinuerlig forrentning	271
4.3 Logaritmer	277
4.4 Den naturlige logaritmefunksjonen	280
Regneregler for logaritmer	282
4.5 Den deriverte av $\ln x$ og e^x	283
4.6 Andre eksponensialfunksjoner og logaritmesystemer	290
4.7 L'Hôpitals regel	293
Sammendrag av kapittel 4	297
Oppsummerende oppgaver til kapittel 4	299

KAPITTEL 5 Følger og rekker

5.1 Summetegnet	311
5.2 Aritmetiske rekker	317
Serielån	320
5.3 Geometriske rekker	322
5.4 Konvergente og divergente rekker	325
5.5 Finansmatematikk	329
Renteformelen	329
Nåverdi	330
Nåverdi av en annuitet	331
Tilbakebetaling av lån etter annuitetsprinsippet	334
Serielån og annuitetslån, en sammenlikning	335
Kontinuerlig forrentning	338
5.6 Taylors formel	339
Taylorpolynomer	340

Taylor's formel, restleddet	342
5.7 Binomiske koeffisienter	345
5.8 Binomialformelen	346
Sammendrag av kapittel 5	349
Oppsummerende oppgaver til kapittel 5	352

KAPITTEL 6 **Integraler**

6.1 Det ubestemte integralet.	363
6.2 Noen integrasjonsregler	365
6.3 Arealet under en funksjonsgraf.	367
6.4 Det bestemte integralet.	371
Uegentlig integral	372
6.5 Delvis integrasjon	373
6.6 Integrasjon ved substitusjon	375
6.7 Integrasjon av rasjonale funksjoner	378
6.8 Inntektsfordelinger	382
Sammendrag av kapittel 6	386
Oppsummerende oppgaver til kapittel 6	387

KAPITTEL 7 **Funksjoner av flere variable**

7.1 Funksjoner av to variable	399
7.2 Grafisk fremstilling av funksjoner av to variable	404
7.3 Nivåkurver	407
7.4 Partiell derivasjon	412
7.5 Partiell derivasjon av 2. orden	416
7.6 Sammensatte funksjoner	418
7.7 Implisitte funksjoner.	421
7.8 Maksimum og minimum for funksjoner av flere variable.	425
7.9 Lokale ekstremalpunkter	433
7.10 Klassifisering av stasjonære punkter.	433
7.11 Maksimering/minimering under bibetingelser.	435
Sammendrag av kapittel 7	445
Oppsummerende oppgaver til kapittel 7	447

KAPITTEL 8 **Lineær algebra**

8.1 Lineære likningssett	461
8.2 Gauss-eliminasjon.	464
Gauss-eliminasjonsprosedyren	467

8.3	Gauss-eliminasjon på matriseform.....	470
8.4	Determinanter.....	473
	Underdeterminanter og komplementer.....	476
	Cramers regel.....	478
8.5	Regning med matriser.....	480
	Definisjoner og regneregler.....	481
	Addisjon og subtraksjon av matriser.....	483
	Matrisemultiplikasjon.....	483
	Den inverse matrisen.....	485
	Å finne den inverse matrise.....	486
	Sammendrag av kapittel 8.....	489
	Oppsummerende oppgaver til kapittel 8.....	491
	Stikkordregister.....	497
	Formelsamling.....	501

Forord til 9. utgave

Matematikk for økonomi og samfunnsfag er skrevet for metodekurset i det treårige bachelorstudiet i økonomi og administrasjon og er lagt tett opp til rammeplanen for studiet, men læreboken kan også benyttes på høyskoler og universiteter som innleder studiet med et kurs i matematikk/statistikk/metode tilsvarende fem til ti studiepoeng.

Boken er lagt opp for studenter med lite matematisk kompetanse. Forfatterne går derfor meget grundig til verks i begynnelsen. Det første kapitlet, «Grunnleggende emner (med bootcamp-øvelser i regning)», kan leses som et forkurs.

Forfatterne har lagt mer vekt på å utvikle leserens intuitive matematiske forståelse enn teorigjennomgang og bevisførsel. Eksempler og oppgaver er valgt med tanke på at leseren skal bli fortrolig med reelle problemer fra økonomi og samfunnsfag. Noen eksempler er løst ved hjelp av Excel. Disse filene ligger fritt tilgjengelig på bokens hjemmeside, <http://mos.cappelendamm.no>, slik at du kan legge dem inn på egen datamaskin og arbeide videre med dem.

Til lærebokens oppgaver finnes en egen løsningsbok. *Matematikk for økonomi og samfunnsfag. Løsningsforslag* gir deg detaljerte løsninger på omtrent halvparten av oppgavene i boken, samt fasitsvar på de øvrige oppgavene.

9. utgave er revidert av Njål Foldnes og Steffen Grønneberg, og innledningskapitlet om grunnleggende regning og kapittel 8, om lineær algebra, er vesentlig forbedret i forhold til tidligere utgaver. De øvrige kapitler har gjennomgått en lett revisjon med bare enkelte endringer.

I kapittel 1 er første del grundig revidert, og det er lagt inn mer repetisjonsstoff fra videregående trinnet. Her er det også lagt til mange enkle regneoppgaver med løsninger på samme side (det er dette vi kaller bootcamp-øvelser i regning). Strukturen i kapittel 1 er likevel i stor grad beholdt.

I kapittel 8 er blant annet innledningen forenklet og noen mindre aktuelle deler er fjernet. Vi introduserer til gjengjeld Gauss-eliminasjon som et nyttig startpunkt for lineær algebra.

Juni 2018

Harald Bjørnstad, Ulf Henning Olsson, Frank Tolcsiner og Svein Søyland

1

Grunnleggende emner (med bootcamp-øvinger i regning)

Dette kapitlet er et treningsprogram for å lære å regne. Vi tar opp emner innen potensregning, brøker, likninger og ulikheter. Vi repeterer også regning med bokstaver, det vil si algebra, og avslutter med en repetisjon av prosentregning.

For studenter som trenger det, har vi laget et bootcamp-opplegg for å mestre regning. Målet er å lære å regne, så bruk kun penn og papir, *ikke kalkulator*.

Alle temaene i dette kapitlet brukes i resten av boken og gjennom resten av utdanningen din. Vår erfaring er at selv om disse emnene virker kjente, er det mange som trenger en oppfriskning. I matte må treningsgrunnlaget være på plass. Dersom du mestrer disse verktøyene, har du en mye bedre sjanse for å prestere bra i faget og i resten av utdanningen din.

1.1 Tall og tallsystemer

Det finnes flere typer tall som er verdt å merke seg siden noen regneoperasjoner bare er tillatt for noen av dem. For eksempel er det ikke lov å ta kvadratroten av negative tall! Vi starter derfor med en rask oversikt over de vanligste tallkategoriene.

De første tallene vi fikk føling med, var helt sikkert de tallene som beskriver et antall. Disse tallene kalles *de naturlige tallene* og er 1, 2, 3 osv. Vi skal merke oss at null - 0 - ikke hører med. De naturlige tallene betegnes med **N**.

Alle naturlige tall har et motsatt tall slik at summen blir 0. Dermed har vi *de hele tallene*. De blir altså -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... Disse betegnes med **Z**.

Behovet for å innføre *de rasjonale tallene* oppsto da vi skulle dividere f.eks. $2 : 3$. Vi skriver det gjerne som en brøk, $\frac{2}{3}$. Generelt har vi at de rasjonale tallene kan skrives som en brøk hvor teller og nevner begge er hele tall, men der nevneren ikke må være 0. De rasjonale tallene betegnes med $\mathbf{Q}$.

Noen tall, slik som $\sqrt{2}$ og π , kan ikke skrives som en brøk. De rasjonale tallene utgjør sammen med *de irrasjonale tallene* *de reelle tallene*. Betegnelsen for disse er $\mathbf{R}$. Vi kan tenke på $\mathbf{R}$ som tallinjen.

1.2 Regning med bokstaver: Algebra

Ofte trenger vi formler som skal kunne passe i bestemte situasjoner, for eksempel for å regne ut nåverdien av en fremtidig kontantstrøm. Her har man bokstaver som står for konkrete tall, som lånebeløp K_0 og terminrente r . Istedenfor å gjøre samme regnestykke om igjen og om igjen, kan man løse regnestykket ved hjelp av algebra for å få en formel man kan bruke i mange forskjellige situasjoner.

EKSEMPEL 1

Tenk på to tall. La oss kalle dem a og b . Summen av dem skrives $a + b$, og vi kan ikke gjøre noe mer med dette uttrykket. Hvis vi vet at $a = 3$ og $b = 5$, kan vi regne ut hva $a + b$ er ved å sette inn i uttrykket. Altså $a + b = 3 + 5 = 8$.

La oss derimot si at vi er interessert i

$$2a + 3b - a$$

som betyr to ganger det første tallet pluss tre ganger det andre tallet, minus det første tallet.

Her betyr $2a = a + a$ og $3b = b + b + b$, og vi har

$$2a + 3b - a = a + a + b + b + b - a$$

Vi kan ikke gjøre noe med b -ene, og lar dem stå som $3b$. Men vi har $a + a - a = a$. Derfor kommer vi ikke lenger enn

$$2a + 3b - a = a + 3b$$

Nå kan vi bruke den forenklede formelen hvis vi vil sette inn for $a = 3$ og $b = 5$, og har

$$2a + 3b - a = 3 + 3 \cdot 5 = 3 + 15 = 18$$



EKSEMPEL 2

Her kommer et litt mer komplisert uttrykk:

$$2a + 3b - a + 3a - a - b$$

Det er to typer ledd: a og b . Vi grupperer dem hver for seg og trekker sammen, slik at

$$\begin{aligned} 2a + 3b - a + 3a - a - b &= 2a - a + 3a - a + 3b - b \\ &= 3a + 2b \end{aligned}$$

Hittil har vi kalt leddene a og b . Hvilke bokstaver vi har valgt, har ikke noe å si, og vi kunne like godt kalt dem x og y . Vi vet derfor at

$$2x + 3y - x + 3x - x - y = 3x + 2y$$

I fasiter er ledd ofte skrevet alfabetisk, så hvis du hadde regnet selv og kommet frem til $2y + 3x$, er også det helt riktig svar. •

EKSEMPEL 3

Noen ganger jobber vi med både med kjente og ukjente tall. De ukjente tallene er skrevet som bokstaver. Da får vi uttrykk som inneholder både bokstaver og *konstanter*. Vi har for eksempel at

$$10 + 3a - 1 = 9 + 3a.$$

Her har vi to typer ledd, et a -ledd og et konstantledd, etter utregningen $10 - 1 = 9$. Det er viktig at vi først inspiserer uttrykket for å finne ut hvor mange typer ledd vi har. Hver type ledd må regnes ut for seg. •

Bootcamp-øvinger:

a) $5a + b - 2a$

b) $-b + 3b - a$

c) $a + 2b + 2c - a + 2b$

d) $u + 2v + 200v + 10$

Løsninger:

a) $3a + b$, eller $b + 3a$

b) $-a + 2b$, eller $2b - a$

c) $4b + 2c$

d) $\mu + 202v + 10$

EKSEMPEL 4

Tenk på et tall x og gang det med seg selv. Vi skriver $x \cdot x = x^2$. Når et tall ganges med seg selv flere ganger, kaller vi resultatet en *potens*. Vi må passe på å skille x -leddene fra x^2 -leddene. Dette er ulike typer ledd, som ikke kan slås sammen: $x^2 - 3x + 5x^2 + 6 - 4x = x^2 + 5x^2 - 3x - 4x + 6$

$$= 6x^2 - 7x + 6$$

Formelen vi har funnet, har nøyaktig tre ledd: x^2 , x og konstantleddet. Man pleier å skrive konstanten til slutt og x^2 før x . •

EKSEMPEL 5

Tenk på to tall, a og b , og gang dem sammen. Dette skrives $a \cdot b = ab$. Gange-tegnet skriver man ofte ikke, slik som $2 \cdot a = 2a$. Når vi har to ledd som ganges sammen, får vi en ny type ledd som må håndteres for seg. Vi har

$$2ab + a - ab = 2ab - ab + a = ab + a.$$

Vi har også

$$xyz + xy + 2xyz + y + 10 = 3xyz + xy + y + 10$$

Her har vi fire typer ledd, og vi kan ikke forenkle dette noe mer. •

EKSEMPEL 6

Trekk sammen

$$\begin{aligned} & -3a^3 + a - 2a^2 + 5a - a^2 + 5a^3 \\ &= -3a^3 + 5a^3 - 2a^2 - a^2 + a + 5a \\ &= 2a^3 - 3a^2 + 6a \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} & a^2b^2 + 4ab - 4a^2b + 3ab - ab^2 - 5ab + 2a^2b \\ &= a^2b^2 - 4a^2b + 2a^2b - ab^2 + 4ab + 3ab - 5ab \\ &= a^2b^2 - 2a^2b - ab^2 + 2ab \end{aligned}$$

•

Bootcamp-øvinger:

- a) $3a^2 + a - a^2$
- b) $-a + a^2 - 5a^2 + 2$
- c) $10 + x + xy + 1 - x$
- d) $x^2y^2 + 2xy^2 + 1$
- e) $-5a^2b + 5ba^2$

Løsninger:

- a) $2a^2 + a$
- b) $-4a^2 - a + 2$
- c) $xy + 11$
- d) Kan ikke forenkles
- e) 0. ($a^2b = a \cdot a \cdot b = b \cdot a \cdot a = ba^2$)

EKSEMPEL 7

Poenget med formler er at vi kan sette inn de tallene som gjelder i vår situasjon. Vi skal sette inn $x = 7$ og $y = 2$ i

$$2xy - y^2 + 1$$

og får

$$2 \cdot 7 \cdot 2 - 2^2 + 1 = 28 - 4 + 1 = 25$$

Det er viktig å huske at ganging er «sterkere» enn plussing: Gangestykker må regnes ut før vi begynner å plusse eller trekke fra. ●

EKSEMPEL 8

Er

$$3 + 2 \cdot 5$$

lik 25 eller 13? Riktig svar er 13. ●

EKSEMPEL 9

Vi vil regne ut

$$3 + 2 \cdot 4^2$$

Hvilken rekkefølge skal vi bruke? Vi vet at vi må gange først og så plusse, men hva skal vi gjøre med 4^2 ? Hvis vi husker at 4^2 betyr 4 ganger 4, har vi et uttrykk med bare gange og pluss. Vi får derfor

$$3 + 2 \cdot 4^2 = 3 + 2 \cdot 4 \cdot 4 = 3 + 32 = 35.$$

Så husk: Først potenser, så ganging. Til slutt plusser vi eller trekker fra. ●

Bootcamp-øvinger:

Sett inn $x = 2$ og $y = 3$ og regn ut

a) $x^2 + xy$

b) $x + y + 2y^2$

c) $x^2y - x - 2y + 1$

Løsninger:

a) $2^2 + 2 \cdot 3 = 4 + 6 = 10$

b) $2 + 3 + 2 \cdot 3^2 = 5 + 2 \cdot 9 = 5 + 18 = 23$

c) $2^2 \cdot 3 - 2 - 2 \cdot 3 + 1 = 4 \cdot 3 - 2 - 6 + 1 = 12 - 2 - 6 + 1 = 5$

Regnestykker inneholder ofte parenteser. Det som er inni parentesen, må da behandles som en enhet, det vil si et tall. Vi må være veldig oppmerksomme på hvordan vi regner med parenteser, slik at denne meningen respekteres.

EKSEMPEL 10

Vi vil regne ut

$$19 - 2 \cdot (2 + 4)$$

Og da skal $(2 + 4)$ behandles som ett tall, altså 6.

$$19 - 2 \cdot (2 + 4) = 19 - 2 \cdot 6 = 19 - 12 = 7$$

EKSEMPEL 11

Vi vet at $3^2 = 9$. Hva med $(-3)^2$? Jo, det blir også 9:

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$

(Husk at minus ganger minus blir pluss.)

EKSEMPEL 12

Vi kan løse opp en parentes med + (pluss) foran uten videre:

$$2x - 3y + (4x + y) = 2x - 3y + 4x + y = 6x - 2y$$

Men står det - (minus) foran, må vi skifte alle tegnene inne i parentesen når vi «løser» den opp.

$$2x - 3y - (4x + y) = 2x - 3y - 4x - y = -2x - 4y$$

Noen ganger får vi en minus foran et negativt tall, og to minuser blir pluss.

$$1 - (4 - y) = 1 - 4 - (-y) = -3 + y = y - 3$$

Nå kan vi klare mer omfattende utregninger ved å bruke reglene vi har lært:

$$3a - (2a + 3) - (4a - 5) = 3a - 2a - 3 - 4a + 5 = -3a + 2$$

$$3x^2 - (-4x - x^2) + (2x^2 - 3x) = 3x^2 + 4x + x^2 + 2x^2 - 3x \\ = 6x^2 + x$$

Regler for algebra

$$a + a = 2a \quad [1]$$

$$a + b = b + a \quad [2]$$

$$-(a + b) = -a - b \quad \text{og} \quad -(a - b) = -a + b \quad [3]$$

Bootcamp øvinger:

- a) -1^2
- b) $(-1)^2$
- c) $b+(a+b)$
- d) $b+(b-a)$
- e) $2x-(y+x)$
- f) $x-(1+x)$
- g) $x^2-(1-x^2)$

Løsninger:

- a) $-(1 \cdot 1) = -1$
- b) $(-1) \cdot (-1) = 1$
- c) $a+2b$
- d) $-a+2b$ eller $2b-a$
- e) $x-y$
- f) -1
- g) $2x^2-1$

OPPGAVE 1.1

Trek sammen uttrykkene

- a) $7a+3b-5b+4c-3a+6b+5ac$
- b) $2x^2-3x^3+4x+10x^2-3x$
- c) $5xy+4xz-3yx+3yz-xy+xz$
- d) $A^2+AB-aB+4AB-3A^2$

OPPGAVE 1.2

Hva blir

- a) $x+y+(x+y)$
- b) $x+y+(x-y)$
- c) $x+y+(-x+y)$
- d) $x-y-(x+y)$
- e) $x-y-(x-y)$
- f) $x-y-(-x-y)$

OPPGAVE 1.3Sett inn $x=3, y=-2, z=-1$ og regn ut

- a) $5x-3y+2z$
- b) $2x-y^2+3z^3$
- c) $xy-xz-(x-yz)$
- d) $x^2+y^2+z^2-2x-3y-4z-(x^2-2xz+3xy)$

Parentesregler

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c = ab+ac \quad [4]$$

$$(a+b) \cdot (c+d) = ac+bc+ad+bd \quad [5]$$

EKSEMPEL 13

$$2(x+1) = 2x+2$$

$$x-3(x-1) = x-3x-3 \cdot (-1) = x-3x+3 = -2x+3$$

$$\begin{aligned} 2a(2a+3b)-2(a^2-ab) &= 4a^2+6ab-2a^2+2ab \\ &= 2a^2+8ab \end{aligned}$$

$$(x+1)(x+2) = x^2+x+2x+2 = x^2+3x+2$$

EKSEMPEL 14

Et litt større eksempel:

$$\begin{aligned} &(3ab^2+2a^2b)(a-b) \\ &= 3ab^2 \cdot a + 2a^2b \cdot a + 3ab^2 \cdot (-b) + 2a^2b \cdot (-b) \\ &= 3a^2b^2 + 2a^3b - 3ab^3 - 2a^2b^2 \\ &= a^2b^2 + 2a^3b - 3ab^3 \end{aligned}$$

Bootcamp-øvinger:

a) $10(x+1)$

b) $3(2x+4y)$

c) $2x-2x(1-x)$

d) $(2x-2x)(1+x)$

e) $(a+b)(a+b)$

f) $(a+b)(a-b)$

g) $(a-b)(a-b)$

h) $(b+a^2)(b^2+2)+2(a+1)$

Løsninger:

a) $10x+10$

b) $6x+12y$

c) $2x-2x+2x^2 = 2x^2$

d) $0 \cdot (1+x) = 0$

e) $a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2$

f) $a^2-ab+ba-b^2 = a^2-b^2$

g) $a^2-ab-ba+b^2 = a^2-2ab+b^2$

h) $a^2b^2+b^3+2a^2+2a+2b+2$

OPPGAVE 1.4 Regn ut og trekk sammen

- a) $a(a^2 + 3a + 4) - a^2(a - 5)$
- b) $(2x - 1)(1 - x)$
- c) $(y^2 - x^2)(y - x) - (x^2 - y^2)(x - y)$

OPPGAVE 1.5 Sett $a = -1$, $b = 2$ og $c = -2$ og regn ut

- a) $2abc$
- b) $4a^3b^2c^5$
- c) $(8b - a)(c - 3b)$

OPPGAVE 1.6 Regn ut uttrykkene y_1, y_2 og y_3 for $x = -2, -1, 0, 1$ og 2 når

$$y_1 = 2x + 1$$

$$y_2 = -3x + 4$$

$$y_3 = -2x^2 + 3x - 4$$

1.3 Potenser og enkel brøkregning

I dette avsnittet skal vi se på skrivemåter og regler for potenser, inkludert brøker av potenser. Vi frisker også opp grunnleggende regler for brøkregning, et tema vi kommer tilbake til senere i kapitlet.

Vi skriver $a \cdot a = a^2$ og $a \cdot a \cdot a = a^3$ og så videre. Merk at $a^1 = a$.

Definisjon av en potens

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ faktorer}} = a^n$$

n faktorer

a er grunntallet, n er eksponenten.

EKSEMPEL 1

Vi har

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

Grunntallet kan også være negativt:

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 4 \cdot (-2) = -8$$

EKSEMPEL 2 La oss si vi vil regne ut $3^2 \cdot 3^5$.

$$3^2 \cdot 3^5 = \underbrace{3 \cdot 3}_{2 \text{ ganger}} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{5 \text{ ganger}} = 3^7$$

Vi teller altså opp antall 3'ere og kan forenkle regningen til

$$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$$

Dette vil alltid fungere når vi ganger sammen to potenser *med samme grunntall*. For eksempel er

$$5^7 \cdot 5^9 = 5^{7+9} = 5^{16}$$

Potensregel

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

[1]

Potenser med *samme grunntall* i en brøk kan forenkles slik:

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{1 \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = \frac{a \cdot a \cdot a}{1} = a^3$$

Vi har fem a -er og stryker to a -er, og står derfor igjen med tre a -er.

Vi kan derfor tenke på dette som

$$\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$$

For eksempel er

$$\frac{3^8}{3^7} = 3^{8-7} = 3^1 = 3$$

Brøkregel potens

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

[2]

EKSEMPEL 3 Vi regner ut

$$\frac{x^2}{x} = \frac{x^2}{x^1} = x^{2-1} = x^1 = x$$

Husk at $x^1 = x$.

Bootcamp-øvinger:

Gjør uttrykkene enklere ved å bruke potensreglene [1] og [2].

a) $x^2 x^3 x^4$ b) $x^2 y^3 xy^2$ c) $\frac{x^{100}}{x^{70}}$

Løsninger:

a) $x^2 x^3 x^4 = x^{2+3} x^4 = x^5 x^4 = x^9$

b) $x^2 y^3 xy^2 = x^2 xy^3 y^2 = x^{2+1} \cdot y^{3+2} = x^3 y^5$

c) $\frac{x^{100}}{x^{70}} = x^{100-70} = x^{30}$

For mer omfattende oppgaver trenger vi å repetere noen regler for brøker. Vi husker først på hvordan vi multipliserer to brøker: Vi multipliserer teller med teller og nevner med nevner. Altså har vi

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$$

Bootcamp-øvinger:

Regn ut og forkort hvis mulig.

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$

b) $\frac{1}{2} \cdot 2$ *Hint: Bruk at $2 = \frac{2}{1}$*

c) $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}$